Impact Factor: 9.2
ISSN-L: 2544-980X

ОБ ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Мадрахимов Аскарали [1]

Аннотация: *В данной статье доказана теорема о скорости сходимости в ЦПТ для статистики* S_n.

Ключевые слова: *вероятность, центральная предельная теорема, оценка, непрерывная функция, экспоненциальные распределенные.*

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ выборка объема n из независимых случайных величин с общей непрерывной функцией распределений $F(x)$ [1,3].

Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \min(x_1, x_2, ..., x_k)$$

В 1972 году Höglund рассмотрел сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \min(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$$

где $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимые стандартные экспоненциальные распределенные случайные величины и написал явный вид характеристической функции этой величины, воспользовавшись, свойствами отсутствия после действий и она имеет вид

$$f_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{it}{k(1-it)}\right)$$

В справедливости последней формулы можно убедиться следующим способом:

Преобразуем характеристическую функцию $f_n(t)$ к виду

$$f_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-it}\right) \quad (1)$$

[1] Доцент Ферганского государственного университета;
Электронная почта: U_Xonqulov@mail.ru

Из (1) следует, что распределение $\sum_{k=1}^{n}\min(\xi_1,...,\xi_k)$ совпадает с распределением суммы $T_n=\sum_{k=1}^{n}z_k$, где

$$z_k=\begin{cases}0, & c\ \ вероятностью\ \ \left(1-\frac{1}{k}\right)\\ \xi_k, & c\ \ вероятностью\ \frac{1}{k}\end{cases}$$

Далее, легко вычислить моменты величины z_k:

$$Mz_k=\frac{1}{k},\quad Dz_k=\frac{2k-1}{k^2},\quad M\,|\,z_k\,|^3\le\frac{6}{k}$$

И применяя центральную предельную теорему Эсеена, [4,5,6] получим

$$\left|P\left(\frac{T_n-a_n}{b_n}<x\right)-\Phi(x)\right|\le 6c\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{(b_n)^{3/2}}\le C_1\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \qquad (2)$$

Здесь $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{k^2}$, C – абсолютная постоянная из оценки Эсеена.

Замечание. В (2) можно a_n заменить на $\ln n$, b_n на $2\ln n$ при этом порядок оценки не ухудшится.

Теперь переходим к общему случаю. Предположим для $0<x<\delta$, $\exists p(x)=F'(x)>0$ и $\exists p'(x)=<x<\infty$.

Пусть $H(x)=F^{-1}(1-e^{-x}),\ H(0)=0;\ H'(0)=\frac{1}{P(0)}$,

$$|H''(\theta)|=\left|\pi\left[\frac{1}{p(0)}+\frac{p'(0)}{p^3(0)}\right]\right|<c$$

Обозначим $u_k=min(x_1,x_2,...,x_k),\ v_k=\min(\xi_1,...,\xi_k)$. Тогда можно считать, что

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}H(v_k)+\sum_{k=1}^{n}(1-y_k)H(v_k) \qquad (2)$$

В (2) положим $y_k=1$, если $v_k<\delta$ и $y_k=0$, если $v_k\ge\delta$.

Поскольку для ненулевых слагаемых в $\sum_{k=1}^{n} y_k H(v_k), \quad v_k < \delta$, то можно использовать формулу Тейлора в нуле

$$\sum_{k=1}^{n} y_k H(v_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{1}{p(0)} v_k + H''(\theta) v_k^2 \right) \tag{3}$$

Так как, $v_k \overset{p}{=} \frac{\xi_1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$ и по условию $|H''(\theta)| < C$, то из (2) и (3) следует, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - y_k) \left(H(v_k) - \frac{1}{p(0)} v_k \right) +$$

$$+ \frac{1}{p(0)} \sum_{k=1}^{n} v_k + \sum_{k=1}^{n} y_k H''(\theta) v_k^2 = J_1 + J_2 + J_3 \tag{4}$$

По неравенству Чебышева получим

$$P(J_3 > \sqrt[4]{\ln n}) \leq \frac{C}{\sqrt[4]{\ln n}} \tag{5}$$

Для оценки J_1, предположим, что $Mx_1 < \infty$.

Тогда приняв $u_k = H(v_k)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} M(u_k;\ u_k > \delta) = \sum_{k=1}^{n} k \int_{\delta}^{\infty} x(1 - F(x))^{k-1} dF(x) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k\, (1 - F(\varepsilon))^{k-1} \int_{\delta}^{\infty} x dF(x) < C,$$

так как $1 - F(\delta) < 1$ и $x \in (0, \delta), \ \ p(x) > 0$. Аналогично со вторым слагаемым в J_1. Поэтому $M\,|J_1| < C$ и опять применяя неравенство Чебышева следует, что

$$P(|J_1| > \sqrt[4]{\ln n}) \leq \frac{C}{\sqrt[4]{\ln n}} \tag{6}$$

Таким образом применяя оценку Эссена для J_1, имеем

$$\sup_x \left| \left(\frac{J_1 - \dfrac{\ln n}{p(0)}}{\dfrac{1}{p(0)} \sqrt{2 \ln n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\ln n}}$$

Остаётся применить лемму В.В.Петрова [5]. В лемме положим $J_1 + J_3 = Y,\quad J_2 = X$ и $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\ln n}}$ убедимся о справедливости следующей теоремы.

Теорема. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительные случайные величины с общей непрерывной функцией распределения $F(x)$ и выполняются следующие условия:

1) $p(x) > 0,\quad p'(x) < c$ при $x \in (0, \delta)$
2) $Mx_1 < \infty$.

Тогда

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\left(S_n - \dfrac{\ln n}{p(0)} \right) p(o)}{\sqrt{2\ln n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{C}{\sqrt[4]{\ln n}} \tag{7}$$

В случае, если x_1 - имеет стандартное показательное распределение, то

из (7) получим

$$\sup_x \left| P\left(\frac{(S_n - \ln n)}{\sqrt{2\ln n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{C}{\sqrt{\ln n}}.$$

Литература:

1. Zharov, V. K. (2012). Formanov Sh. K., Honkulov Yu. Kh. On the statistical method in a pedagogical experiment in the context of a modern educational process. *Bulletin of the Moscow State Regional University. Series Pedagogy*, (3), 104-110.
2. Егоров В.А., Невзоров В.Б. Суммирование членов вариационного ряда и нормальный закон. Вестник ЛГУ, 1974,, с.105-128.
3. Khankulov, U. K. (2017). Description of Methodical System of Teaching Elements of Stochastics Line Mathematics Using Computer Technologies. *Eastern European Scientific Journal*, (6).
4. Хонкулов, У. Х. (2015). О применениях компьютерных технологий в обучении элементов стохастики. *Региональные проблемы преобразования экономики*, (8 (58)), 76-82.
5. Хонкулов, У. Х. (2018). ON THE SELECTION PRINCIPLES OF EDUCATIONAL CONTENT OF STOCHASTIC ELEMENTS OF MATHEMATICS. *Наука и мир*, *2*(4), 56-57.
6. Khursanalievich, K. U., Ugli, T. T. S., & Askarali, M. (2022). DRAWING AND IMAGE MODELS TOOL MATH LEARNING OPTIONS. *American Journal of Applied Science and Technology*, *2*(09), 26-34.