Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

# Ихтисослаштирилган Мактабларда Генетик Ёндашув Асосида Тригонометрияни Ўқитиш Haqida

*Xonqulov Ulug'bek Xursanaliyevich* [1]

**Аннотация**: Ушбу мақолада ихтисослаштирилган мактабларда тригонометрияни генетик ёндашув асосида кўргазмали ўқитиш хусусиятлари баён қилинган. Бунинг учун ўқув материалларини кўргазмали тақдим этишда қўлланиладиган услубий-дидактик воситаларни аниқлаштириш ва альтернатив вариантларни излаб топиш, тригонометрик формулаларни келтириб чиқаришнинг генетик аспектларини ишлаб чиқиш, узлуксиз такомилаштириб бориш, эвристик усулларни комплекс қўллаш вазифалари устивор этиб белгиланди. Мақолада тригонометрик формулаларни мантиқий тузилмавий генетик ёндашув асосида келтириб чиқариш усуллари келтирилган.

**Калит сўзлар:** мантиқий тузилмавий генетик ёндашув, иллюстратив-когнитив усуллар,илмий изланиш ва хулоса чиқариш методлари.

**KIRISH.** Ихтисослаштирилган мактабларда математик билимларни тизимлаштириш ва умумлаштириш хусусан, тригонометрияни ўқитишнинг самарали ёндашуви сифатида кўргазмалиликни генетик алоқадорлик асосида таъминлаш долзарб аҳамият касб этмоқда. Дарс жараёнида ўқитувчи математик тушунчаларнинг тузилмавий генетик жиҳатларига эътибор қаратиши, жадваллар, структуравий диаграмма ва тасвирлардан фойдаланиб ўқитишни олиб бориши мақсадга мувофиқ деб ҳисоблаймиз. Ўқув адабиётларда кўргазмали қуроллар ва воситаларнинг қуйидаги турлари келтирилган: тарбиявий кўргазмали қуроллар; таъсирли кўргазмали қуроллар; ҳажмли кўргазмали қуроллар; шартли ва тимсолли кўргазмали қуроллар; ҳар хил моделлар, махсус приборлар, асбоблар ва шу каби турларга бўлинади. Кўргазмали қуроллар воситасида билим бериш дарс жараёнининг барча босқичларида қўлланилади. Тажрибалардан айтиш мумкинки, генетик ёндашув асосида тригонометрияни кўргазмали ўқитишни таъминлаш ўқувчилар томонидан математик билимларни осон ўзлаштириш имконини беради. Масалан, кўпбурчак ва айлана, хусусан учбурчак тушунчасидан фойдаланиб тригонометрик формулаларнинг тузилмавий генетик формасини аниқлаштириш муаммосини ушбу мақолада кўриб чиқайлик. Муаммонинг зарурияти қуйидагилар билан изоҳланади:

1. Тригонометрия курси алгебра ва геометриянинг интеграцион тугуни сифатида бурчакларни ўлчаш ва гармоник жараёнларни ўрганишда аҳамиятли бўлсада, тригонометрияни генетик ёндашув асосида ўқитишдаги мавжуд муаммолар комплекс ўрганилмаган.
2. Ақлий фаолиятнинг акс этиши, ўқувчилар тригонометриянинг мантиқий тузилишини онгли тушуниши, математик назариянинг келиб чиқишини кузатиши ва яхлит идрок этиши учун генетик ёндашув концепциясига асосланган кўргазмали ўқитишнинг методик, дидактик муаммолари тўлиқ ҳал этилмаган.

### Mavzuga oid adabiyotlar tahlili (Literature review)

Maktabda trigonometriyani o'rganishning metodik muammolari bo'yicha ko'plab tadqiqotchilar tomonidan ishlanmalar taklif etiladi. Masalan баъзи тадқиқотчиларнинг (Г.М.Луканина[1], Н.Марасов[2], Ш.А.Бакмаева[4], И.Н.Попов[2], Б.Б.Молоткова[1], С.С.Суханова[3], О.В.Захарова[1], О. Каримий[4], У.Х.Хонкулов[1], Kevin Moore[1] va Cos Dabiri[2] ва бошқалар) методик ишланмаларини методологик асос сифатида олиш фойдалидир. Уларда

[1] Fargona давлат университети

тригонометрияни ўқитишни такомиллаштириш, тригонометрияни ўрганишда ўқувчиларни ҳисоблаш техникасини ривожлантиришга қаратилган фойдали жиҳатларни таълим амалиётида қўллаш тавися этилади. Лекин koʻrgazmalilik, tasvir воситасида trigonometrik tushuncha orasidagi bog’liqlikni ta’minlash muammolari kam oʻrganilgan.

**Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology).**

Ихтисослаштирилган мактабларда генетик ёндашув асосида тригонометрияни кўргазмали ўқитишни таъминлаш учун қуйидаги вазифаларни самарали ҳал этилиши талаб этилади:

- ўқув материалларини кўргазмали тақдим этишда қўлланиладиган услубий-дидактик воситаларни аниқлаштириш ва альтернатив вариантларни излаб топиш;
- тригонометрик тушунчаларни иллюстратив воситалардан фойдаланиб шакллантириш ва келтириб чиқаришнинг генетик аспектларини ишлаб чиқиш, узлуксиз такомилаштириб бориш, эвристик усулларни комплекс қўллаш.

Юқоридаги вазифаларни ҳал этишда кўргазмали ўқитишнинг услубий-дидактик воситалари (жадваллар, тасвирлар, учбурчак, трапеция) тушунчаларнинг мантиқий-тузилмавий генетикасини шакллантиришда қўллаш мумкинлини кўриб чиқамиз. Бунда тригонометрияни кўргазмали ўқитишда генетик ёндашувнинг аҳамияти қуйидагилар билан белгиланади:

- олинган билимларни расмийлаштиришга тўсқинлик қилади;
- янги тушунчаларни дидактик ва методик жиҳатдан малакали киритиш имконини беради;
- мураккаб мавзуларни онгли сингдиришга ёрдам беради;
- ўрганилаётган мавзуни режалаштиришда материални ўрганиш кетма-кетлигини белгилайди;
- эвристик усулларидан фойдаланишни назарда тутади;
- ўқитувчи томонидан ўқувчиларнинг билиш фаоллигини ривожлантириш жараёнини мақсадли бошқаришга имкон беради;
- ўқув ва когнитив фаолият жараёнида курснинг ички алоқадорлигини таъминлайди.

Тригонометрик формулаларни шартли равишда тузилмавий генетик жиҳатдан икки гуруҳга бўлиш мумкин. Биринчиси, бир аргументли тригонометрик функциялар орасидаги асосий алоқаларни акс эттирса, иккинчиси эса барча бошқа формулаларни бирлаштиради. Ушбу формулаларни генетик ёндашув асосида учбурчак тушунчасидан фойдаланиб шакллантиришни энг самарали деб ҳисоблаймиз. Бундай ёндашувни тизимли ривожлантириш мумкин.

**1.** *Асосий тригонометрик формулалар.*

$ABC$ тўғри бурчакли учбурчакда $CH$ баландлик бўлсин (1-расм). У ҳолда ўткир бурчакнинг синуси ва косинуси таърифига кўра $\cos\alpha = \frac{AH}{b} = \frac{b}{c}$, $\sin\alpha = \frac{BH}{a} = \frac{a}{c}$ ва бундан катетларнинг гипотенузадаги проекциялари формулаларини оламиз: $b^2 = AH \cdot c$, $a^2 = BH \cdot c$. Иккинчи томондан $b = c \cdot \cos\alpha$ ва $a = c \cdot \sin\alpha$ бўлгани учун Пифагор теоремасига кўра $a^2 + b^2 = c^2$ дан $(c \cdot \cos\alpha)^2 + (c \cdot \sin\alpha)^2 = c^2$ ва бундан асосий тригонометрик айният формуласи

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad (1)$$

келиб чиқади. (1) формуладан $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ва $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ эканлигини кўриш мумкин. (1) формулани $\sin^2\alpha \neq 0$ ёки $\cos^2\alpha \neq 0$ ифодага бўлиш орқали

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (2)$$

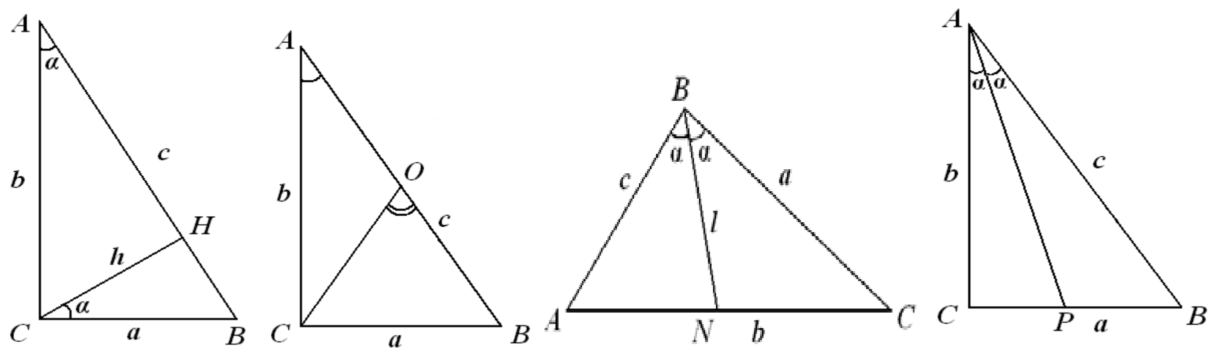
$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (3)$$

формулаларни оламиз. Юқоридаги каби мулоҳаза қилиш орқали ўткир бурчакнинг тангенси ва котангенси таърифидан фойдаланиб $tg\alpha$ ва $ctg\alpha$ орасидаги боғланишни оламиз. Агар $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ ва $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ эканлиги инобатга олинса, $tg\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ва $ctg\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Демак, $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$.

Бундан

$$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha} \quad (4)$$

келиб чиқади.




**1-расм.** **2-расм.** **3-расм.** **4-расм.**

**2.** *Иккиланган бурчакнинг синуси формуласи.*

Тўғри бурчакли $ABC$ учбурчакда $\angle A=\alpha$, $CO$ - медиана бўлсин (2-расм). У ҳолда $\angle B=90^0-\alpha$ ва $CO=\frac{c}{2}$ бўлгани учун тенг ёнли $COB$ учбурчакда $\angle B=\angle OCB$ ва $\angle COB=180^0-2\cdot(90^0-\alpha)=2\alpha$. $CO$ - медиана $ABC$ учбурчак юзини тенг иккига бўлади: $\frac{1}{2}S_{ABC}=S_{COB}$. Бу ерда $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ ва $S_{COB}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\sin 2\alpha$ бўлгани учун $\frac{1}{4}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\sin 2\alpha$. Бундан $\sin 2\alpha=\frac{2b\sin\alpha}{c}$. Ўткир бурчакнинг косинуси таърифига кўра $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ бўлгани учун $\sin 2\alpha=\frac{2b\sin\alpha}{c}$ тенгликка кўра

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad (5)$$

иккиланган бурчакнинг синуси формуласи келиб чиқади.

Энди иккиланган бурчакнинг косинуси формуласини келтириб чиқарамиз. Бизга ихтиёрий $ABC$ учбурчакда $BN = l$ биссектриса бўлсин (3-расм). У ҳолда $S_{ABC} = S_{ABN} + S_{BNC}$ ва $\frac{1}{2}cl\sin\alpha + \frac{1}{2}al\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin 2\alpha$. Бундан иккиланган бурчак формуласини инобатга олинса $l(c+a) = 2ca\cos\alpha$ эканлигидан биссектриса формуласи келиб чиқади: $l = \frac{2ac\cos\alpha}{a+c}$. Ҳосил бўлган формулани тўғри бурчакли $ABC$ учбурчакка татбиқ этамиз (4-расм). Тўғри бурчакли $ABC$ учбурчакда $AP$ биссектриса бўлсин, у ҳолда $AP = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$. Ўткир бурчак синуси ва косинуси таърифига кўра $AP = \frac{b}{\cos\alpha}$ ва $AB = c = \frac{b}{\cos 2\alpha}$. Бу ифодаларни биссектриса формуласи $AP = \frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$ га қўямиз:

$$\frac{b}{\cos\alpha} = \frac{2b\frac{b}{\cos 2\alpha}\cos\alpha}{b + \frac{b}{\cos 2\alpha}}; \quad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\cos\alpha}{\cos 2\alpha}}{1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}}.$$

Охирги тенгликдан $\cos 2\alpha$ ни топамиз. Натижада иккиланган бурчакнинг косинуси формуласи келиб чиқади:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \quad (6)$$

(6) формулани шакл алмаштирамиз:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Демак, иккиланган бурчакнинг косинуси формуласини қуйидагича ҳам ифодалаш мумкин:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad (7)$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (8)$$

Иккиланган бурчакнинг синуси ёки косинуси формулаларини $tg\alpha$ орқали ифодаланишини кўриб чиқамиз. Бунда биз яна чизма ва тасвир элементларинидан фойдаланамиз. Тенг ёнли $ABC$ учбурчак берилган бўлсин (5-расм). Шартли равишда тенг ёнли $ABC$ учбурчакнинг асоси $AB = 2n$ ва асосга туширилган баландлик $CH = m$ бўлсин. Агар $AC$ ён томонга $BP$ бааланлик туширилса, $ABC$ учбурчакнинг юзи $S = \frac{1}{2}\cdot 2nm = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BP$. Бундан $BP$ баландликни топамиз: $BP = \frac{2mn}{AC}$. Тўғри бурчакли $CHB$ учбурчакдан $BC = AC = \sqrt{n^2 + m^2}$ бўлгани учун $BP = \frac{2mn}{\sqrt{n^2+m^2}}$. Тўғри бурчакли $BCP$ учбурчакдан

$$PC = \sqrt{(BC)^2 - (BP)^2} = \sqrt{n^2 + m^2 - \frac{4n^2m^2}{n^2+m^2}} = \sqrt{\frac{(n^2+m^2)^2 - 4n^2m^2}{n^2+m^2}} = \frac{\left|m^2 - n^2\right|}{\sqrt{n^2+m^2}}.$$

Тўғри бурчакли $BCP$ учбурчакдан $2\alpha$ бурчакнинг синуси, косинусини топамиз: $\sin 2\alpha = \frac{PB}{BC}$, $\cos 2\alpha = \frac{PC}{BC}$. $BC = AC = \sqrt{n^2 + m^2}$ ва $BP = \frac{2mn}{\sqrt{n^2 + m^2}}$ ва $PC = \frac{|m^2 - n^2|}{\sqrt{n^2 + m^2}}$ эканлигидан $\sin 2\alpha = \frac{2mn}{n^2 + m^2}$, $\cos 2\alpha = \frac{|m^2 - n^2|}{n^2 + m^2}$ келиб чиқади. Уни $m^2$ га бўлиш орқали $\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{n}{m}}{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}$ ва $\cos 2\alpha = \frac{\left|1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2\right|}{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}$ Агар $CHB$ учбурчакдан

$tg\alpha = \frac{n}{m}$ эканлиги инобатга олинса,

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \quad (9)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} \quad (10)$$

Агар (9) ва (19) формулаларни ҳадма ҳад бўлсак, иккиланган бурчакнинг тангенси ва котангенси формуларини келиб чиқади:

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2 a} \quad (11)$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha} \quad (12)$$

**3.** *Даражани пасайтириш формулалари.*

Даражани пасайтириш формулаларини иккиланган бурчак косинуси формуласидан келтириб чиқарилади. (6) ва (8) формулалардан $2\sin^2\alpha$ ва $2\cos^2\alpha$ қийматларни топамиз:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad (13)$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad (14)$$

Ҳосил қилинган формулаларни ҳадма-ҳад бўлиш орқали қуйидагиларги оламиз:

$$tg^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \quad (15)$$

$$ctg^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \quad (16)$$

**4.** *Ярим бурчак формулари.*

Тригонометрик айниятларнинг аргументлари нолдан фарқли ихтиёрий ҳақиқий сонларга кўпайтириш ёки бўлиш мумкинлиги инобатга олинса, даражани пасайтириш формулаларидан ярим бурчак формулалари ёки каррали бурчак формулаларини оламиз.

$$2\cos^2\frac{\alpha}{n}=1+\cos\frac{2\alpha}{n}\ ,\ n\in Z\ (17)$$

$$2\cos^2 n\alpha=1+\cos n\cdot 2\alpha\ (18)$$

Худди шу мулоҳазани (14), (15), (16) формулаларга ҳам тадбиқ этиш мумкин.

**5.** *Қўшиш формулалари.*

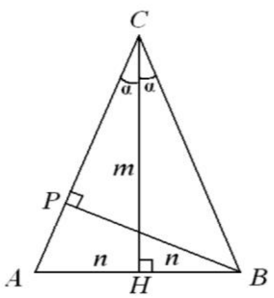
$ABC$ тўғри бурчакли учбурчакнинг $BC$ катетига ихтиёрий $AP$ тўғри чизиқ ўтказилсин (6-расм). Маълумки, $S_{ABC}=S_{ACP}+S_{APB}$. У ҳолда $\frac{1}{2}bc\sin\varphi=\frac{1}{2}bl\sin\alpha+\frac{1}{2}lc\sin(\varphi-\alpha)$. Тўғри бурчакли $ACP$ ва $ABC$ учбурчакдан ўткир бурчак косинуси таърифига кўра $l=\frac{b}{\cos\alpha}$ ва $c=\frac{b}{\cos\varphi}$ топилади. Демак, $\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi\cdot\cos\alpha}$. Бундан қуйидаги $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$ ёки $tg\varphi-tg\alpha=\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}$ тенглик келиб чиқади. Ушбу тенгликка умумий махраж берилса

$$\sin(\varphi-\alpha)=\sin\varphi\cos\alpha-\sin\alpha\cos\varphi\ (19)$$

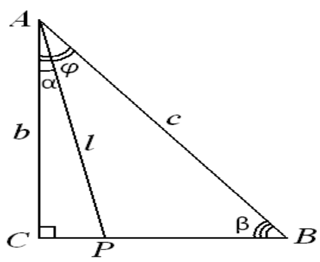
формулалар келиб чиқади. Тўғри бурчакли $ABC$ учбурчакда $\varphi+\beta=90^0$ ва $\varphi=90^0-\beta$ бўлгани учун келтириш формуласига кўра

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ (20)$$

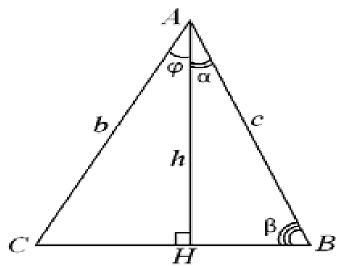
эканлигини кўриш мумкин.



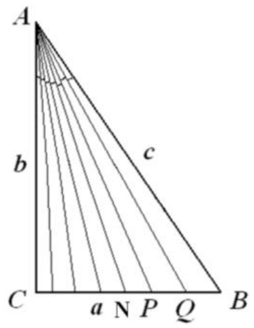
**5-расм.**



**6-расм.**



**7-расм.**



**8-расм.**

Кўриниб турибдики, қўшиш формулалари тўғри бурчакли учбурчакдан фойдаланиб келтириб чиқарилмоқда. Лекин ихтиёрий учбурчакдан фойдаланиб ҳам бу ишни амалга ошириш мумкин (7-расм). Масалан, $ABC$ учбурчакнинг $BC$ томонига $AH$ баландлик туширилган бўлсин. У ҳолда $c=\frac{h}{\cos\alpha}$ ва $b=\frac{h}{\cos\varphi}$ ҳамда $S_{ABC}=S_{ACH}+S_{AHB}$.

Демак,

$$\frac{1}{2}bc\sin(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}bh\sin\varphi+\frac{1}{2}hc\sin\alpha$$

Бундан

$$\sin(\varphi+\alpha)=\sin\varphi\cos\alpha+\sin\alpha\cos\varphi \quad (21)$$

формула келиб чиқади. $\alpha = 90^0 - \beta$ бўлгани учун

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha \quad (22)$$

эканлини кўриш мумкин.

**Адабиётлар**

1. Khankulov, U. K. (2017). Description of Methodical System of Teaching Elements of Stochastics Line Mathematics Using Computer Technologies. *Eastern European Scientific Journal*, (6).
2. Khursanalievich, K. U., Ugli, T. T. S., & Askarali, M. (2022). DRAWING AND IMAGE MODELS TOOL MATH LEARNING OPTIONS. *American Journal of Applied Science and Technology*, *2*(09), 26-34.
3. Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp. 547-589). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
4. Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 228). Prague: PME.