Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Limitik Sikllar. Davriy Yechimga Ega Bo'lmagan Tenglamalarning Ba'zi Belgilari

Husanov Bazar [1], *Tuyg'unov Javlonbek* [2]

Annotatsiya: Maqolada o'ng tamoni analitikfunksiyalardan iborat bo'lgan differensial tenglamalarning limitik sikllari va davriy yechimlarga ega bo'lish shartlari bilan bir qatorda Bendikson belgisi va Dyulak belgilari shartlari bajarilganda limitik sikllarga hamda davriy yechimlarga ega bo'lmaslik shartlari berilgan va misollarda ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Limitik sikl, aylanma yechim, maxsus nuqta, focus, spiral chiziqlar, bir bog'lamli soha, davriy yechim, Dyulak belgisi, Bendakson belgisi, yopiq kontur, yopiq integral chiziqlar, doimiy ishorali.

Ushbu maqolada quydagi ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamaning limitik sikllari va yechimlarini tekshiramiz

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad (1).$$

Bu yeda $P(x,y), Q(x,y)-$ lar analitik funksiyalardan iborat bo'lsin.

Ta'rif. Agar biror yopiq integral chiziq L ning yetarlicha kichik atrofida (1) tenglamaning L dan boshqa yopiq integral chiziqlari bo'lmasa, L ga limitik sikl deyiladi. Quyidagi tenglamani limitik sikllarini qarab chiqamiz

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+y(x^2+y^2)}{-x-y+x(x^2+y^2)} \quad (2).$$

Bu tenglamaning chiziqli qismi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{-x+y} \quad (3)$$

ko'rinishda bo'lib, uning xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(1+\lambda)^2+1 \text{ yoki } (1+\lambda^2)=-1,$$

bundan $1+\lambda=\pm i$ yoki $\lambda_{1,2}=-1\pm i$ bo'ladi ya'ni $O(0;0)$; (2) va (3) tenglamalarning maxsus nuqtasi bo'lib (2) tenglama uchun

$$x^2+y^2=1 \quad (4)$$

aylana yechim, ya'ni integral chiziq bo'lib unga limitik sikl deyiladi.

Haqiqatdan (2) dan (4) ga asosan

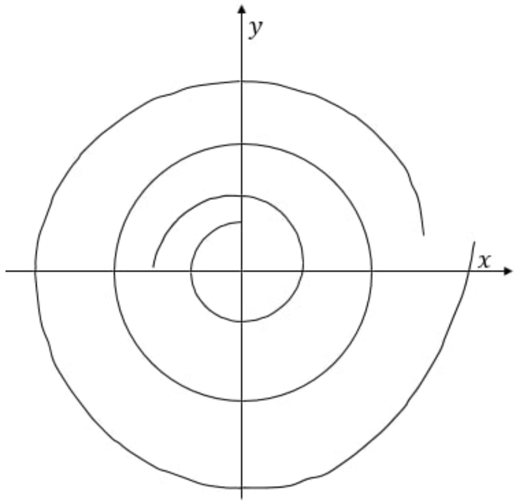
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+y}{-x-y+x}=-\frac{x}{y}$$

ya'ni (4) funksiya (2) tenglamani qanoatlantiradi. XOY tekislikda yechimlarning grafigi 1-chizmadagidek bo'ladi, ya'ni chizmada yakkalangan aylana va uning atrofidagi spiralsimon chiziqlar

[1] SamDAQU, f.-m.f.n., dotsent
[2] SamDAQU, o'qituvchi

joylashgan. Yakkalangan $x^2 + y^2 = 1$ aylana (2) tenglama uchun Limitik sikldir. Qutb koordinatalar sistemasida

$$\frac{dr}{d\varphi} = r - 1 \quad (5)$$



1-chizma

Tenglama berilgan bo'lsin r va φ lar XOY tekislikda qutb koordinatalari. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$r = 1 + ce^{\varphi} \quad (6)$$

shaklida bo'lib, $c -$ ixtiyoriy o'zgarmas.

$c < 0$ bo'lganda r manfiy bo'lmasligi uchun $-ln|c|$ dan katta qiymat qabul qilmasligi kerak (6) integral chiziqlar oilasi 1-chizmadagi kabi bo'ladi va quyidagi hollar bo'ladi;

1. $c < 0$ bo'lganda spiral chiziqlar $\varphi \to -\infty$ da koordinatalar boshidan chiqib aylanaga yaqinlashadi.
2. $c = 0$ da $r = 1$ aylanaga mos keladi, ya'ni xususiy yechim bo'ladi.
3. $c > 0$ bo'lganda aylanadan tshqaridagi integral chiziqlar $\varphi \to -\infty$ da aylanaga yaqinlashadi va $r = 1$ aylana tenglamasining limitik sikli bo'ladi.

Limitik sikllarni topish yoki ularni sonini aniqlash juda muhim muammolardan iborat bo'lib, bu sohada biror umumiy usul mavjud emas, yoki bu sohada mukammal ish hozircha qilinmagan. Limitik sikllar tabiiy fanlarda keng qo'llaniladi. Masalan tebranishlar nazaryasida qaralayotgan tenglamalarni fizik ma'nosi limitik siklar bilan bog'lab o'rganiladi.

Differensial tenglama yoki differensial tenglamalar sistemasining limitik siklga ega bo'lmasligini o'rganish ham muhim ahamiyatga ega. Tenglamalarning davriy yechimlarga ega bo'lmaydigan ba'zi belgilar mavjud bo'lib ular quyidagilardan iborat.

Agar XOY tekislikning bir bog'lamli G sohasida

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} \quad (7)$$

Ifoda doimiy ishorali bo'lsa, u holda bu sohada to'liq joylashgan (1) tenglama davriy yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatdan ham Grin formulasiga asosan ushbu

$$\iint \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right) dxdy = \oint (Pdy - Qdx)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar bu yerda integrallash konturini to'liq G sohada joylashgan davriy yechim bo'yicha olsak, (1) ga asosan u nolda teng, yani ikki karrali integral ham nolga teng bo'ladi. Demak, (7) ifoda qaraliyotgan konturning ba'zi bir joylarida o'z ishorasini almastirish kerak bo'ladi. Bu esa bizni qarama – qarshilikka olib keladi, ya'ni (7) ifoda doimiy ishorali bo'lsa, G dan o'tayotgan integral chiziqlardan iborat bo'lgan yopiq kontur yo'q. Bu esa (1) tenglamani davriy yechimga ega emasligini isbotlaydi. Bu belgi G sohada davriy yechimlarning yo'qligini ko'rsatuvchi yetarli shartdan iborat bo'lib hisoblanadi. Bu belgiga Bendekson belgisi deyiladi. Bendekson belgisining umumlashgan holi Dyulak belgisi bo'lib, uzluksiz va uzluksiz hosilalarga ega bo'lgan shunday $\tau(x,y)$ funksiya mavjud bo'lsaki, XOY tekislikning bir bog'lamli G sohasida ushbu ko'rinishdagi

$$\frac{d(\tau P)}{dx}+\frac{d(\tau\theta)}{dy} \quad (8)$$

ifoda doimiy ishorali bo'lsa, u holda (1) tenglamaning integral chiziqlardan iborat bo'lgan yopiq kontur bu sohada joylashgan bo'lmaydi.

Agar bizga ushbu ko'rinishdagi tenglama berilgan bo'lsa

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b_{30}x^3+b_{21}x^2y+b_{12}xy^2+b_{03}y^3}{y+a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3} \quad (9).$$

Uning davriy yechimga ega emasligini tekshiramiz a_{ij} va b_{ij} lar o'zgarmas koeffisentlardan iborat (7) ifodani tuzib olamiz:

$$\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}=(3a_{30}+b_{21})x^2+2(a_{21}+b_{12})xy+(a_{12}+3b_{03})y^2=V(x,y)$$

XOY tekislikda $\lambda(x,y)$ funksiya doimiy (o'zgarmas) ishorali bo'lishi uchun

$$(a_{21}+b_{12})^2-(3a_{30}+b_{21})(a_{12}+3b_{03})\geq 0$$

shart bajarilishi kerak. Bu shart bajarilganda XOY tekislikda (9) tenglama davriy yechimga ega bo'lmaydi.

Agar

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x(ax+by+c)=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=y(a_1x+b_1y+c_1=Q(x,y)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Tenlamalar sistemasini tekshiramiz:

Bu yerda $\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0, a, b, c, a_1, b_1$ va c_1 lar o'zgarmas koeffisentlardan iborat.

Chiziqlimas tebranish nazaryasining ko'p masalalari bu sistemaga keltirilib, yechilganligi uchun uni o'rganamiz. Bu tenglamalar sistemasi (10) uchun Limitik siklarga ega bo'lmagan shartlarni topish mumkin. Buning uchun Dyulak belgisidan foydalanamiz $\lambda(x,y)$ funksiyani $\lambda(x,y)=x^{k-1}y^{h-1}$ shaklda tanlab olamiz. Bu yerda k va h lar hozircha noma'lum o'zgarmaslar. (8) ifodani tuzamiz

$$\frac{d(\lambda P)}{dx}+\frac{d(\lambda Q)}{dy}=x^{k-1}y^{h-1}[(a+ka+ha_1)x+(kb+hb_1+b_1)y+hc_1+kc]$$

k, h larni tanlash uchun ushbu algebraik k va h larga nisbatan quyidagicha yozamiz:

$$\left.\begin{aligned}ak+a_1h+a_1&=0\\ bk+b_1h+b_1&=0\end{aligned}\right\}$$

bu yerda k va h larni topsak,

$$k = \frac{b_1(a_1 - a)}{\delta}, h = \frac{a(b - b_1)}{\delta}$$

bularga asosan (8) ifoda

$$\frac{d(\lambda P)}{dx} + \frac{d(\lambda Q)}{dy} = \frac{\lambda(x,y)\big(b_1 c(a_1 - a) + a c_1 (b - b_1)\big)}{\delta} \quad (11)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Koordinata o'qlari (10) sistemada $y = 0$ va $x = 0$ yechimlardan iborat. Limitik sikl bo'lsa, to'rt kvadratlardan birida joylashishi mumkin.

Agar

$$b_1 c(a_1 - a) + a c_1 (b - b_1) \neq 0 \ (12)$$

deb olsak, (11) ifoda har bir kvadrantda doimiy ishorali bo'ladi, chunki $\lambda(x,y)$ har bir kvadrantda doimiy ishorali bo'lib (12) bajariladigan holda Dyulak belgisiga asosan (10) sistema limitik siklga ega bo'lmaydi.

Yuqorida aytib o'tganimizdek differensial tenglama va differensial tenglamalar sistemasini limitik sikllari, davriy yechimlarini o'rganish mexanika, radiotexnika, biologiya, kinetik kimyo fanlarida masalarini yechishda keng qo'llaniladi. Shu sababli katta ahamiyatga ega.

Foydanilgan adabiyotlar.

1. Андироков А.А, Витт А.А, Хайкии С.Э, “ Теория колебаний” Госиздат, М. 1959 г.
2. Еругин Н.П, “Книга для чтения по общену курс дифференциальных уровнений” , Минск, “Наука и техника” 1979 г.
3. Хусанов, Б., & Туйгунов, Ж. (2024). О Распределении Исключительных Направлений Трёхмерной Однородной Полиномиальной Дифференциальных Системы. *World of Scientific news in Science, 2*(5), 317-323.
4. Хусанов, Б., & Туйгунов, Ж. (2024). КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛАХ МНОГООБРАЗИЙ ОБОБЩЁННО–ОДНОРОДНОЙ N-МЕРЕНОЙ СИСТЕМЫ. *Multidisciplinary Journal of Science and Technology, 4*(2), 391-395.
5. Исмаилович, КС (2024). Применение метода линейного программирования в задаче оптимального водоснабжения населения. ИКТИСОДИЕТ ВА ЗАМОНАВИЙ ТЕХНОЛОГИЯ ЖУРНАЛИ| ЖУРНАЛ ЭКОНОМИКИ И СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ , 3 (5), 124-128.
6. Khusanov, B., Shodiyev, K., Khasanov, A., & Tuygunov, J. (2023). Finding maximum profit in Economics through quadratic function. *Gospodarka i Innowacje., 36*, 62-68.