Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

# Matematik Statistikada Ishlatiladigan Ba'zi Bir Taqsimotlar

*Erkinova Odinaxon Kozimjon qizi* [1]

**Annotatsiya:** Ushbu maqola -tasodifiy miqdor n-ozodlik darajasiga ega bo'lgan -taqsimot ning kelib chiqishi undan qandey foydalanish haqida malumotlarimiz berib o`tilgan .Asosan St'yudent taqsimoti va Fisher taqsimoti haqida chuqur malumotlar berib o`tilgan.

**Kalit so`z:** St'yudent taqsimoti, Fisher taqsimoti, -taqsimot, korrelyatsiyalangan, Muavr – Laplas.

## $\chi^2$ -taqsimot.

$\xi$ -tasodifiy miqdor n-ozodlik darajasiga ega bo'lgan $\chi^2$ -taqsimot qonuniga ega deyiladi agarda uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Bu erda $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ gamma funksiya bo'lib, xususan $\Gamma(n+1) = n!$. Bu tasodifiy miqdorning momentlari quyidagicha aniqlanadi: $M\xi^k = n(n+1).....[n+2(k-1)]$, $D\xi = 2n$, $\eta_3 = 8n$, $\eta_4 = 48n + 12n^2$,……..

Asimmetriya koeffitsienti $A_3 = \sqrt{\frac{8}{n}}$, ekstsess koeffitsienti $E_3 = \frac{12}{n}$.

1. $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan va (0,1) parametrli normal qonunga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U xolda $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ tasodifiy miqdor n-ozodlik darajali $\chi^2$ -taqsimot qonuniga ega bo'ladi. Statistikada nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ bilan tajriba natijalari orasidagi muvofiqlikni tekshirish kriteriyasi Pirsonning $\chi^2$ -statistikasini o'rganishga asoslangan. $\chi^2$ -statistika quyidagicha aniqlanadi: $\chi^2 = \sum_{i-1}^{k} \frac{n_i - np_i}{np_i}$. Bu yerda $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $x_0 = -\infty < x_1 < ... < x_k = \infty$ $(-\infty;+\infty)$ intervalning ixtiyoriy bo'linishi, $n_i - [x_{i-1}, x_i)$ intervalga tushgan kuzatmalar soni. Qo'yilgan gipoteza to'g'ri deb faraz qilinganda $\chi^2$ -statistika $n \to \infty$ da k-1 ozodlik darajasiga ega bo'lgan $\chi^2$ -taqsimot qonuniga ega bo'ladi va bu $\chi^2$ -taqsimot F(x) taqsimot funksiyasidan bog'liq bo'lmaydi.

[1] Andijon davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti Matematika va informatika yònalishi 2 – bosqich talabasi

**St'yudent taqsimoti.**

$\xi$ -tasodifiy miqdor $\alpha$ -ozodlik darajali St'yudent taqsimotiga ega deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa:

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}},\ x\in(-\infty;\infty).$$

Bunday tasodifiy miqdorlarning momentlari quyidagicha topiladi:

$$M\xi^{2k-1}=0 \qquad M\xi^{2k}=\frac{\alpha^k\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-k\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \qquad 2k<\alpha,$$

$$D\xi=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha-2}, & \alpha>2\\ \infty, & \alpha\le 2\end{cases}$$

Agar $\eta$ va $\varsigma$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, va $\varsigma$ - n-ozodlik darajali $\chi^2$ - taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lib, $\eta$ -standart normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsa, u xolda $\xi=\eta\sqrt{\frac{\text{T}}{\varsigma}}$ n-ozodlik darajali St'yudent taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'ladi. Bu taqsimotning statistikadagi tatbiqlarida ko'p xollarda $\alpha$ -natural son bo'ladi. St'yudent taqsimoti statistikada normal taqsimlangan boshto'plam o'rta qiymatiga qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda dispersiya noma'lum bo'lganda ishlatiladi. $\alpha$ -ning etarlicha katta qiymatlarida St'yudent taqsimoti standart normal taqsimotga asimptotik yaqinlashib boradi.

**Fisher taqsimoti:** Agar $\xi$ va $\eta$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular $k_1$ va $k_2$ ozodlik darajali $\chi^2$ qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda $F=\frac{\xi/k_1}{\eta/k_2}$ tasodifiy miqdor $F$ taqsimotga (yoki $k_1$ va $k_2$ ozodlik darajali Fisher taqsimotiga) ega deyiladi. $F$ taqsimotning zichligi:

$$P_{k_1,k_2}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C_0\frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1x+k_2)^{(k_1+k_2)/2}}, & x>0\end{cases}$$

Bu yerda $x>0$ da $C_0\ \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}$.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari $(x,y)$ sonlar jufti bo'lgan $(\xi,\eta)$ - ikki tasodifiy miqdor sistemasiga aytiladi. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari diskret bo'lgan miqdorga aytiladi. Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan miqdorga aytiladi. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb, bu miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari $P_{ij}=P(\xi=x_i,\eta=y_i)$, $i=1,2,...,n,\ i=1,2,...,m$ ro'yxatiga aytiladi. Taqsimot qonuni odatda jadval shaklida beriladi.

| x | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | $p_{31}$ | … | $p_{n1}$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | $p_{32}$ | … | $p_{n2}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $y_m$ | $p_{1m}$ | $p_{2m}$ | $p_{3m}$ | … | $p_{nm}$ |

Uzluksiz ikki o'lchovli $(\xi,\eta)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, $F_{\xi\eta} = P(\xi < x, \eta < y)$ ehtimolga aytiladi.

$F_{\xi\eta}(x,y)$ - taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1) $0 \le F_{\xi\eta}(x,y) \le 1$

2) $F_{\xi\eta}(x_2,y) \ge F_{\xi\eta}(x_1,y)$, agar $x_2 > x_1$ bo'lsa, $F_{\xi\eta}(x,y_2) \ge F_{\xi\eta}(x,y_1)$, agar $y_2 > y_1$ bo'lsa.

3) Ushbu tengliklar o'rinli:

$F_{\xi\eta}(-\infty,y) = 0,\ F_{\xi\eta}(y,-\infty) = 0,\ F_{\xi\eta}(-\infty,-\infty) = 0$

4) $F_{\xi\eta}(\infty,\infty) = 1$

5) $F_{\xi\eta}(x,+\infty) = F_1(x), \qquad F_{\xi\eta}(+\infty,y) = F_2(y)$

Bu yerda $F_1(x)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdor $(\xi,\eta)$- ning $\xi$ tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi, $F_2(y)$ esa $\eta$ tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi.

6) $P(a < \xi < b,\ c < \eta < d) = F_{\xi\eta}(b,d) - F_{\xi\eta}(a,d) - F_{\xi\eta}(b,c) + F_{\xi\eta}(a,c)$.

Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining zichlik funksiyasi deb, taqsimot funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x \partial y};$$

Zichlik funksiyani bilgan holda taqsimot funksiyani

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p_{\xi\eta}(x,y)dxdy;$$

formula bo'yicha topish mumkin.

$(\xi,\eta)$ tasodifiy nuqtaning D sohaga tushish ehtimoli

$P[(\xi,\eta) \in D] = \iint_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy$ tenglik bilan aniqlanadi.

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) $p_{\xi\eta}(x,y) \ge 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1$

$(\xi,\eta)$ - ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning koovariatsiyasi deb quyidagi songa aytiladi:

$\mu_{\xi\eta}(x,y) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta))$

$\xi$ va $\eta$ miqdorlarning korrelyatsiya koeffisienti deb koovariatsiyaning bu miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishlari ko'paytmasiga nisbatiga aytiladi:

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta};$$

Agar $\mu_{\xi\eta} \neq 0$ bo'lsa, bu miqdorlar korrelyatsiyalangan deyiladi.

Agar $\mu_{\xi\eta} = 0$ bo'lsa, bu miqdorlar korrelyatsiyalanmagan deyiladi.

Ikkita korrelyatsiyalangan miqdor, shuningdek, bog'liq hamdir; agar ikkita miqdor bog'liq bo'lsa ularning korrelyatsiyalangan bo'lishi shart emas.

Ikkita miqdorning erkliligidan ularning korrelyatsiyalanmaganligi kelib chiqadi, lekin bu miqdorlarning korrellyasiyalanmaganligidan ularning erkliligi haqida xulosa chiqarish mumkin emas. (Normal taqsimlangan miqdorlar bundan mustasno).

Agar $\xi$ tasodifiy argumentning har bir mumkin bo'lgan qiymatiga $\eta$ tasodifiy argumentning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda $\eta$ ni $\xi$ tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi: $\eta = \varphi(\xi)$. Agar $\xi$ diskret tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'lsa, u holda $\xi$ ning turli qiymatlariga $\eta$ ning turli qiymatlari mos keladi, shu bilan birga $\xi$ va $\eta$ ning mos qiymatlarining ehtimollari bir xil bo'ladi. Boshqacha aytganda, $\eta$ ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ tenglikdan topiladi, $\xi_i$ argument $\xi$ ning mumkin bo'lgan qiymatlari; $\eta$ ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari $P(\eta = \eta_i) = P(\xi = \xi_i)$ tenglikdan topiladi Agar $\eta = \varphi(\xi)$ monoton funksiya bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, $\xi$ ning turli qiymatlariga $\eta$ ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin.

Bunday holda $\eta$ ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini topish uchun $\xi$ ning $\eta$ bir xil qiymat qabul qiladigan qiymalarining ehtimollarini qo'shish lozim.

Agar $\xi$ ushbu $p_\xi(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ differensiallanuvchi monoton funksiya bo'lib, unga teskari funksiya $\eta = \psi(\xi)$ bo'lsa, u holda $\eta$ tasodifiy miqdorning $p_\eta(y)$ zichlik funksiyasini $p_\eta(y) = p_\xi[\psi(\eta)] \cdot |\psi'(\eta)|$ tenglikdan topiladi.

Agar $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya $\xi$ ning qiymatlari intervalida monoton bo'lmasa, u holda bu intervalni $\varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'ladigan intervallarga ajratib, monotonlik intervallarining har biri uchun $p_{\eta_i}(y)$ zichlik funksiyalarini topish, keyin esa $p_\eta(y)$ ni $p_\eta(y) = \sum p_{\eta_i}(y)$ yig'indi ko'rinishida ifodalash lozim.

Agar $\xi$ va $\eta$ tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlarining har bir juftiga $\mu$ tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda $\mu$ ikkita $\xi$ va $\eta$ tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi: $\mu = \varphi(\xi, \eta)$. Agar $\xi$ va $\eta$ diskret erkli tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\mu = \xi + \eta$ funksiyaning taqsimotini topish uchun $\mu$ ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topish lozim, buning uchun $\xi$ ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini $\eta$ ning mumkin bo'lgan qiymatlarining hammasi bilan qo'shib chiqish lozim. $\mu$ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi.

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi + \mu = \xi_i + \mu_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

Huddi shuningdek $\mu = \xi \cdot \eta$ funksiyaning ham taqsimoti topiladi. Bunda $\mu_i = \xi_i \cdot \eta_i$ lar $\mu$ ning mumkin bo'lgan har bir qiymati va $\mu$ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi \cdot \mu = \xi_i \cdot \mu_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

Extimollik nazariyasida «katta sonlar qonuni» deyilganda tor ma'noda bir qator matematik teoremalar tushuniladi va ularning har birida katta sondagi tajribalar o'rtacha harakteristikalarining u yoki bu shartlarda biror ma'lum o'zgarmas miqdorlarga yaqinlashish fakti belgilanadi. Katta sonlar qonuni ehtimollik nazariyasining amaliyotga tatbiqlari uchun nazariy asos bo'ladi.

Bernuli teoremasi: S - tajribada A hodisa $p = P(A)$ ehtimol bilan ro'y beradi. Stajriba o'zaro bog'liq bo'lmagan holda n–marta takrorlanganda A hodisa m marta ro'y bersin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Bu teoremadan ko'rinib turibdiki, A hodisaning ro'y berishi chastotasi $\frac{m}{n}$ - bizga katta n larda A hodisaning ro'y berish ehtimolini berar ekan. Ko'pincha amaliyotda quyidagi Chebishev tengsizligi ishlatiladi.

Chebishev teoremasi: Chekli dispersiyaga ega bo'lgan istalgan $\xi$ tasodifiy miqdor uchun har bir $\varepsilon > 0$ da

$$P\left(\left|\xi - M\xi\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Markaziy limit teoremalar tasodifiy miqdorlar yig'indilari ketma - ketliklarining qanday shartlarda normal taqsimotga bo'ysunishini aniqlab beruvchi teoremalaridir. Ular bir - birlaridan yig'indini hosil qiluvchi tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlariga qo'yiladigan shartlar bilan farq qiladi. Biz markaziy limit teoremaning eng sodda shaklini ta'riflaymiz, u qo'shiluvchilar bir xil taqsimlangan hol uchun to'g'ridir.

Teorema,

Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning matematik kutilishi m va dispersiyasi $\sigma^2$ bo'lgan bir xil taqsimot qonuniga ega bo'lsa, u holda n cheksiz ortganida

$$\frac{\sum_{k=}^{n} \xi_k - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

-ning taqsimot qonuni matematik kutilishi 0 va dispersiyasi 1 bo'lgan normal taqsimotga yaqinlashadi. Muavr - Laplasning lokal teoremasi bu teoremaning xususiy holi ekanini aytib o'tamiz.

**Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. Б.Я.Ягудаев. Ажойиб сонлар оламида. Ўқитувчи нашрёти, Тошкент-1973.
2. В.В. Бардушкин ва бошқалар. Основы теории делимости числ. МГТУ, Москва-2003
3. Ёш математик қомусий луғати. Қомуслар бош таҳририяти. Тошкент-1991.
4. А.Нурметов, И.Қодиров."Математикадан синфдан ташқари машғулотлар". Тошкент-1980.