Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Численное Моделирование Вибрации Нелинейных Вязкоупругих Систем С Двумя Степенями Свободы

Юсупов Мажид [1], *Шарипова У.Б.* [2]

Аннотация: Рассмотрены задачу колебание систем с двумя степенями свободы при силовом возбуждении вибрации, связанной с неподвижным основанием невесомой нелинейной вязкоупругой пружиной. Для учёта реологических свойств материала пружины использован интегральный принцип Больцмана-Вольтерра. Получены математические модель рассматриваемой задачи, которые описывается системами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Разработана метод решения основанного на использовании квадратурных формуле и её основе составлена компьютерная программа, которая полученные результаты отражаются в виде графиков. Исследованы влияние нелинейность и реологические свойства пружины на амплитуду и фаза колебаний массы.

Ключевые слова: ядро релаксации, интегро-дифференциальное уравнение, частота, амплитуда, упругость, вязкоупругость, напряжение, деформация, инерция, интегральный оператор.

Введение. Многие задачи оценки динамических свойств технических объектов при действии на них вибрационных нагрузок решаются при использовании расчётных схем в виде механических колебательных систем с несколькими степенями свободы, что даёт определённые возможности в оценке форм динамических взаимодействий и определении требований к соответствующим структурным решениям, которые предопределяются свойствами составляющих элементов [1-3].

Производственная деятельность в большинстве отраслей промышленного производства обеспечивается работой различного рода технологических машин и транспортных средств. Эксплуатация машин, оборудования, механизмов, аппаратуры и приборов в условиях необходимости обеспечения высокой производительности часто сопровождается значительными динамическими нагрузками, вибрационными процессами и проявлениями ударных взаимодействий элементов машин. Обеспечение надёжности и безопасности эксплуатации машин требует на всех стадиях их жизненного цикла серьёзного внимания к вопросам соблюдения определённых ограничений на параметры динамических состояний технических объектов, разработки способов и средств оценки контроля и управления процессами динамических взаимодействий [4].

Ряд задачи статики и динамики механических систем допускают относительно простые решения, основанные на линейных дифференциальных уравнениях. Однако в ряде случаев необходим учёт дополнительных влияний, вынуждающих отказаться от линейной постановки задачи и заставляющих исследовать так называемые нелинейные системы. Этой проблеме, имеющей большое практическое значение во многих областях техники [5].

Постановка задачи. Моделирование вибрации систем с двумя степенями свободы рассмотрим на примере двух масс, вязкоупругого связанных между собой и со стойкой и совершающих движение вдоль одной оси Z [2]. Пусть массы m_1 и m_2 связаны между собой с коэффициентами

[1] Ташкентский областной Чирчикский государственный педагогический институт доцент
[2] Самаркандский филиал Ташкентского университета, информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми. асс.

$С_1$, а масса m_2 связана с коэффициентами $С_2$. На массы в общем случае действуют гармонические возбуждающие силы:

$$F_1 = m_{в1} e_1 \theta_1^2 cos\theta_1 t;\ F_2 = m_{в2} e_2 \theta_2^2 cos\theta_2 t,$$

где $m_{в1}$, $m_{в2}$ − неуравновешенные массы с удельными дисбалансами соответсвтвенно e_1, e_2; θ_1 и θ_2 − угловые частоты вращений неуравновешенных масс.

На массу m_1 и m_2 при ее смещении из положения равновесия на величину $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ действуют следующие силы:

$m_1\ddot{Z}_1(t), m_2\ddot{Z}_2(t)$ − силы инерции массы m_1 и m_2;

$С_1 R_1^*\left[Z_1(t) - Z_2(t) + \gamma_1\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^3\right]$, $С_2 R_2^* Z_2(t)$ − силы вязкоупругого сопротивления;

$С_1\left[Z_1(t) - Z_2(t) + \gamma_1\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^3\right]$, $С_2 Z_2(t)$ − силы упругого сопротивления.

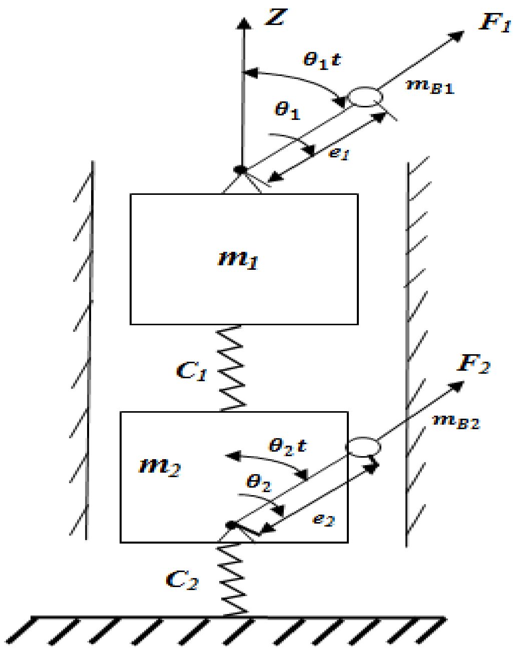


Рис. 1. Динамическая модель двухмассовой колебательной системы при силовом возбуждении вибрации.

Из равновесия системы с учётом принципа Даламбера получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее колебания массы m_1 и m_2:

$$\begin{cases} m_1\ddot{Z}_1(t) + С_1(1 - R_1^*)\left[Z_1(t) - Z_2(t) + \gamma_1\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^3\right] = m_{в1} e_1 \theta_1^2 cos\theta_1 t \\ m_2\ddot{Z}_2(t) + С_2(1 - R_2^*)Z_2(t) - С_1(1 - R_1^*)\left[Z_1(t) - Z_2(t) + \gamma_2\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^3\right] = \\ \qquad = m_{в2} e_2 \theta_2^2 cos\theta_2 t \end{cases} \quad (1)$$

где, γ_1, γ_2 −коэффициенты нелинейности; R_i^* −интегральные операторы с ядрами релаксаций имеющие слабосингулярную особенности типа Абеля $R_i(t) = \varepsilon_i e^{-\beta_i t} t^{\alpha_i - 1}$, ($i = 1{,}2$) [6]:

$$R_i^* f(t) = \int_0^t R_i(t-\tau)\, f(\tau) d\tau, i = 1{,}2.$$

Предположим, что:

$$Z_1(0) = Z_2(0) = \dot{Z}_1(0) = \dot{Z}_2(0) = 0. \quad (2)$$

Методы решения. Введя в (1) следующие безразмерные величины:

$$\frac{Z_1}{Z_x};\ \frac{Z_2}{Z_x};\ \frac{t}{t_x};\ \gamma_1 Z_x^2;\ \gamma_2 Z_x^2;\ \theta_1 t_x t;\ \theta_2 t_x t;$$

и сохраняя при этом прежние обозначения и принимая $\omega_1^2 = \frac{C_1 t_x^2}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{C_2 t_x^2}{m}$, $p_1 = \frac{m_в t_x^2 \theta_1^2 e}{m Z_x}$, $p_2 = \frac{m_в t_x^2 \theta_2^2 e}{m Z_x}$ получим

$$\begin{cases} \ddot{Z}_1(t) + \omega_1^2(1 - R_1^*)\left[Z_1(t) - Z_2(t) + \gamma_1\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^3\right] = p_1 cos\theta_1 t \\ \ddot{Z}_2(t) + \omega_2^2(1 - R_2^*)Z_2(t) - \omega_1^2(1 - R_1^*)\left[Z_1(t) - Z_2(t) + \gamma_2\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^3\right] = p_2 cos\theta_2 t \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) решается методами основанной на использование квадратурной формулы [7-9]. Два раза интегрируя по t системы уравнений (3), на интервале $[0;\ t]$ и учитывая начальные условия (2) имеем:

$$\begin{cases} Z_1(t) + \omega_1^2 \int_0^t G_1(t-s)\left[Z_1(s) - Z_2(s) + \gamma_1\big(Z_1(s) - Z_2(s)\big)^3\right]ds = \frac{p_1}{\theta_1^2}(1 - cos\theta_1 t) \\ Z_2(t) + \omega_2^2 \int_0^t G_2(t-s)Z_2(s)ds - \omega_1^2 \int_0^t G_1(t-s)\left[Z_1(s) - Z_2(s) + \gamma_2\big(Z_1(s) - Z_2(s)\big)^3\right]ds = \frac{p_2}{\theta_2^2}(1 - cos\theta_2 t) \end{cases},$$

где

$$G_p(t-s) = t - s - \int_0^{t-s} (t - s - \tau)R_p(\tau)d\tau\,;\ R_p(t) = \varepsilon_p e^{-\beta_p t} t^{\alpha_p - 1};\ p = 1{,}2.$$

Принимая $t_n = n \cdot \Delta t, (i = 0{,}1{,}2, \dots)$ в последние выражение и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеции, для определения $Z_{1n} = Z_1(t_n)$, $Z_{2n} = Z_2(t_n)$, имеем следующие реккурентные соотношение:

$$\begin{cases} Z_{1n} = \frac{p_1}{\theta_1^2}(1 - cos\theta_1 t_n) - \omega_1^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i G_1(t_n - t_i)\,[Z_{1i} - Z_{2i} + \gamma_1(Z_{1i} - Z_{2i})^3], \\ Z_{2n} = \frac{p_2}{\theta_2^2}(1 - cos\theta_2 t_n) - \omega_2^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i G_2(t_n - t_i) Z_{2i} + \omega_1^2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i G_1(t_n - t_i)\,[Z_{1i} - Z_{2i} + \gamma_2(Z_{1i} - Z_{2i})^3], \end{cases}$$

где $A_0 = A_n = \frac{\Delta t}{2};\ A_j = \Delta t,\ j = \overline{1, n-1};$

$$G_p(t_n - t_i) = t_n - t_i - \int_0^{t_n - t_i} (t_n - t_i - \tau)R_p(\tau)d\tau\,;\ p = 1{,}2.$$

Результаты и выводи. Для проведения, вычислительного расчёта разработана компьютерная программа, которая полученные результаты отражаются в виде графиков. При расчёта использована следующие исходные данные: $\omega_1^2 = 16{,}2$; $\omega_2^2 = 15{,}8$; $\theta_1 = 4{,}2$; $\theta_2 = 3{,}7$; $p_1 = 3{,}5$; $p_2 = 4{,}3$; $\gamma_1 = 15$; $\gamma_2 = 16$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}25$; $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}05$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}1$.

На рис.1 показано влияние вязкоупругих свойств материала пружины на форму колебание массой m_1 и m_2 по линейной постановке задач. Здесь обозначены упругие задачи сплошными линиями и вязкоупругие задачи с пунктирными линиями. Из графика видно, что за счёт вязкости материала пружины, амплитуда колебаний массы уменьшается и происходит сдвиг фазы колебаний. За счёт вязкости форма колебаний с течением времени становится более гладкими.

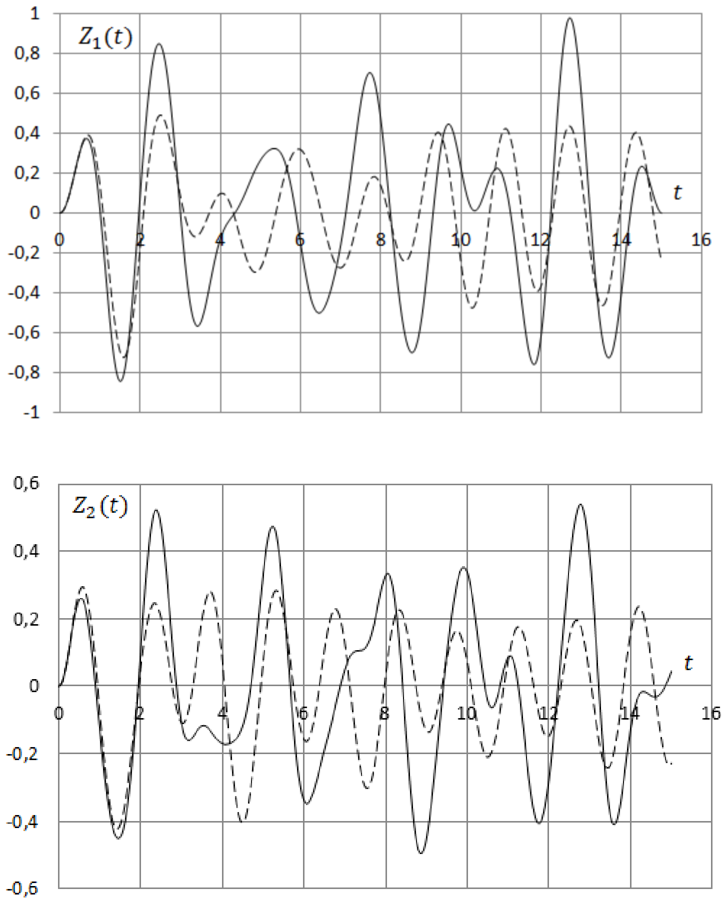
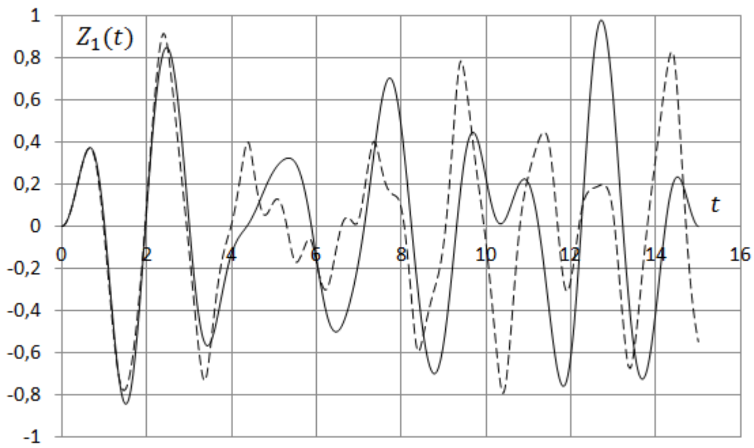


Рис. 1. Влияние вязкости на форме колебание.

В упругой постановке сопоставлен решение линейной и нелинейной задачи (рис. 2). Здесь обозначены решение линейные задачи сплошными линиями и нелинейные задачи с пунктирными линиями. Из графика видно, что нелинейной постановки задачи форма колебание масс становится более сложными.



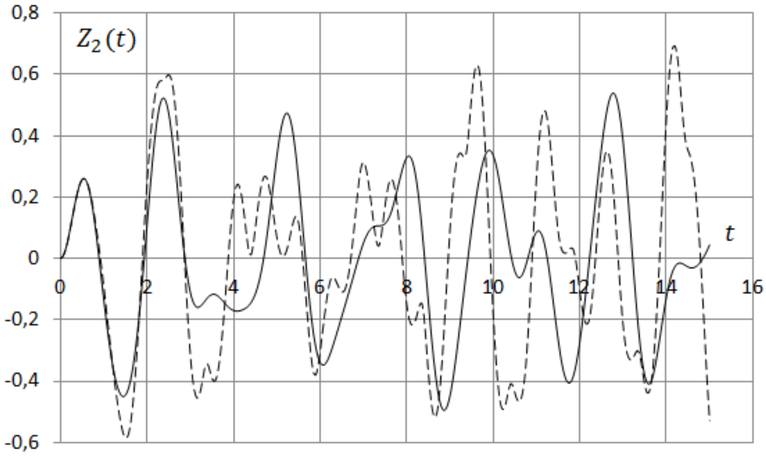


Рис. 2. Сопоставление решение линейной и нелинейной задачи.

Исследованы влияние вязкоупругие свойство пружины на форму колебаний массы m_1 и m_2 по нелинейной постановке задач (рис.3). На графики форма колебание упругой задачи обозначены сплошными линиями и вязкоупругой задачи с пунктирными линиями. Из графика видно, что за счёт вязкости материала пружины, отклонение массы от статической состояние уменьшается и происходит сдвиг фазы колебаний.

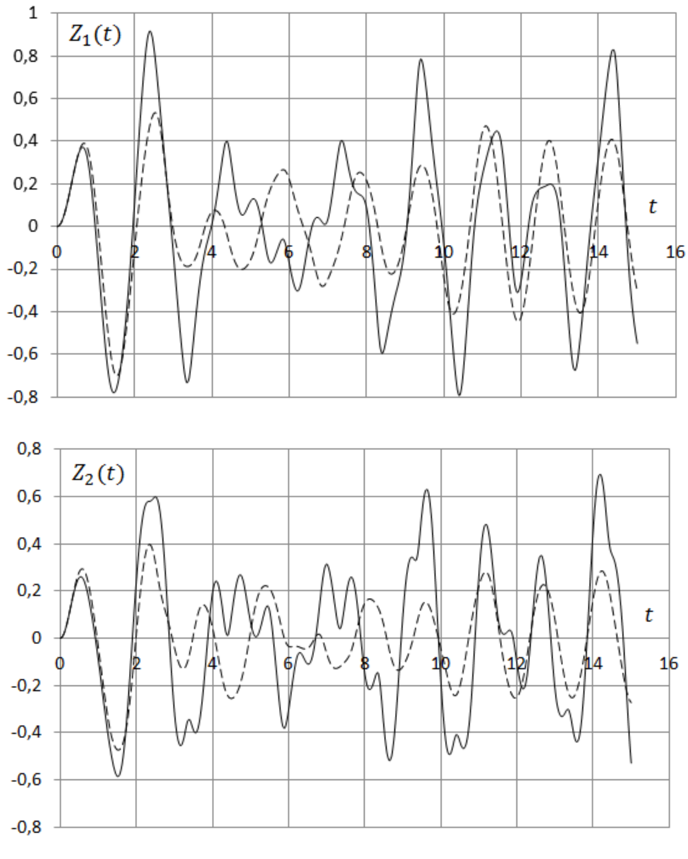
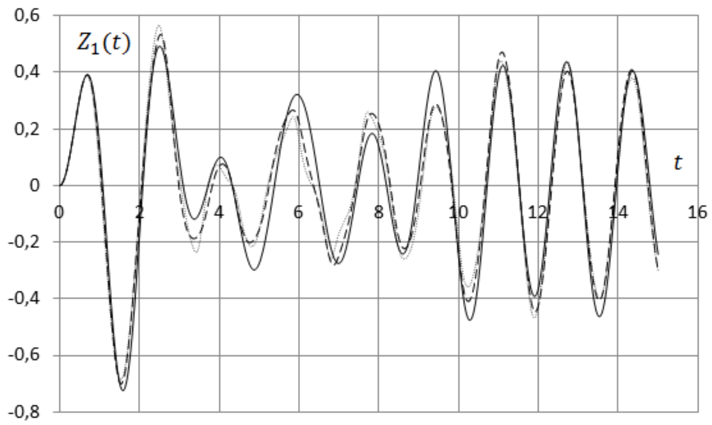


Рис. 3. Влияние вязкости пружины на форму колебаний массы.

Исследованы влияние коэффициента нелинейности на форму колебаний массы m_1 и m_2 в вязкоупругом постановки (рис.4). На графики форма колебание линейной задачи обозначены сплошными линиями и нелинейной задачи с пунктирными линиями. Влияние коэффициента нелинейности на форму колебаний масса m_2 существенно, чем форму колебаний масса m_1. Этот факт объясняется тем, что масса m_2 имеется двухстороннее соединение пружинами.



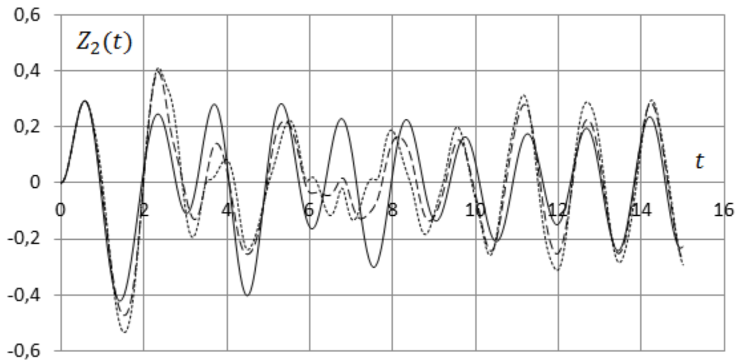


Рис. 4. Влияние нелинейности на форму колебаний массы.

Список литературы

1. Куцубина Н. В., Санников А.А. Теория виброзащиты и акустической динамики машин: учебное пособие – Екатеринбург: Уральский государственный лесотехнический университет, 2014.-167 с.
2. Щепетильников В.А. Уравновешивание механизмов / В.А. Щепетильников.- М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.
3. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов: справочник/ Г.С. Маслов. – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.
4. Елисеев, С.В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С.В. Елисеев, А.И. Артюнин. - Новосибирск: Наука, 2016. - 459 с.
5. Каудерер, Г. Нелинейная механика. – М.: Наука, – 1970. – 224 с.
6. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, – 1977. – 384 с.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х. , Юсупов М. О некоторых методах решения систем инте гродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости / / ПММ. — 1987. — Т. 51, № 5. — С. 867-871.
8. Abdullaev Z., Yusupov M., Mirzaev S., Noraliev N.,Kusharov Z. Dynamic dampers of vibrations of inherited-deformable systems with finite number of degrees of freedom. - International Conference on Materials Physics, Building Structures and Technologies in Construction, Industrial and Production Engineering (MPCPE 2020) 27-28 April 2020, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation.
9. Yusupov M., Rahkmankulova B., Ziyaeva Sh., Kushaev A. Vehicle oscillation taking into account the rheological properties of the suspension.- International Conference on Materials Physics, Building Structures and Technologies in Construction, Industrial and Production Engineering (MPCPE 2020) 27-28 April 2020, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation