Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Математические Модулирование Нестационарные Колебания Кругового Цилиндрического Слоя С Несжимаемой Жидкостью

Каландаров Улугбек Хусанович [1], *Маматов Зайниддин Убайдуллаевич* [2], *Ирсалиев Рустам Худайкулович* [3], *Нурманова Махфуза Уразовна* [4], *Zoirov Sanjaridin Xolmuminovich* [5]

Аннотация: В этой работе рассмотрены осесимметричные задачи для несжимаемой вязкой жидкости. Рассматривается задача о распространении крутильных волн в изотропном упругом цилиндрическом слое, который заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Разработанная методика расчета может быть использована при расчете деталей гидросистем сельскохозяйственных машин с высоким давлением.

Ключевые слова: Цилиндрической слой, вязкая жидкость, крутильные колебания, перемещение точки.

Введение.

В настоящее время проблемы гидроупругости для несжимаемой вязкой жидкости опубликованы лишь в отдельных публикациях в периодических изданиях [1], [2].

В случае линейной теории оболочек и в предположении гармонических по времени воздействиях на систему, решение задачи может определяться в виде гармонической зависимости всех параметров задачи по времени. Это возможно в силу влияния вязкости жидкости, которая приводит к демпфированию колебаний и быстрому затуханию по времени решения из-за начальных условий и выходу на стационарные колебания.[3], [4] Эти условия позволяют найти точные решения линеаризованных уравнений механики жидкости, записанных в виде уравнений теории смазки, но с учётом локального члена инерции для любых значений колебательного (смазочного) числа Рейнольдса оставаясь в рамках ламинарного движения. В указанных случаях нормальное напряжение жидкости (давление) на поверхности упругого тела значительно больше касательного напряжения и последним обычно пренебрегают [5], [6], [7]. Рассмотрим возможность получения приближённого значения решения уравнений динамики жидкости методом итерации, пренебрегая на первом шаге локальным членов инерции и учитывая его на втором шаге итерации. При этом можно доказать, что метод итерации сходится при условии, что колебательное число Рейнольдса меньше единицы. Этот подход позволяет отказаться от требования гармонического закона по времени всех параметров жидкости и упругих элементов [8], [9]. Появляется возможность решать нелинейные уравнения динамики оболочек или при негармонических законах изменения по времени источников движения.

[1] Самаркандский кампус университета экономики и педагогики, кандидат технических наук, доцент
[2] Самаркандский кампус университета экономики и педагогики, кандидат физико-математических наук, доцент
[3] Самаркандский кампус университета экономики и педагогики, ассистент
[4] Самаркандский кампус университета экономики и педагогики, кандидат технических наук (PhD).
[5] Узбекско-Финляндский педагогический институт, ассистент

Физические процессы также изучаются с помощью математической модуляции в виртуальных ситуациях [10], [11], [12].

Результаты: В цилиндрической системе координат (r,θ,z) рассматривается однородный и изотропный круговой цилиндрический упругий слой с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами. При этом $r_1 = const,\ r_2 = const,\ r_2 > r_1$. Кроме того, предполагается, что цилиндрический слой, как трехмерное тело, строго подчиняется математической теории упругости и описывается ее трехмерными уравнениями. Считается, что внутренняя полость слоя заполнена вязкой несжимаемой покоящейся жидкостью, описываемой линеаризованными уравнениями Навье-Стокса.

Уравнения движения слоя

$$\sigma_{ij,j} = \rho \cup_{1,}\ \ (i,j = r,\theta,z),\ x_1 \in V_1 \qquad (1)$$

используются в виде волновых уравнений

$$(\lambda+\mu)\Delta\phi = \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\ ,\ \mu\Delta\overrightarrow{\Psi} = \rho\frac{\partial^2\overrightarrow{\Psi}}{\partial t^2} \qquad x_i \in V_1 \qquad (2)$$

для потенциалов продольных ϕ и поперечных $\overrightarrow{\Psi}$ волн, введенных по формуле [2]

$$\vec{\cup} = grad\Phi + rot\left[\overrightarrow{e_3}\psi_1 + rot\left(\overrightarrow{e_3}\psi_2\right)\right], \qquad x_i \in V_1 \qquad (a)$$

где Δ- оператор Лапласа в системе координат (r,θ,z); $\sigma_{ij,j}, \cup,$ - компоненты тензора напряжений и вектора перемещений; λ,μ- коэффициенты Ламе; ρ- плотность; V_1- объем, занимаемый слоем.

Для вязкой несжимаемой жидкости, при ее малых колебаниях имеем следующие соотношения [2]:

условие несжимаемости

$$div\vec{v} = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (3)$$

уравнение Навье - Стокса

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \upsilon'\Delta\vec{v} + \frac{1}{\rho_0'}gradp = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (4)$$

Закон Навье-Стокса

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu' e_{ij,} \quad x_i \in V_2, \qquad (5)$$

где $\vec{v}$ - вектор скорости частиц жидкости; μ' - коэффициент вязкости;

$\upsilon' = \mu'/\rho_0'$ - кинематический коэффициент вязкости; ρ_0' - плотность покояшейся жидкости; P- гидродинамическое давление; P_{ij} - компоненты тензора напряжений в жидкости; $e_{ij,}$ - компоненты тензора скоростей деформации; V_2 -объем, занимаемый жидкостью.

Введением « скалярного» G и векторного $\vec{x} = \vec{x}(x_1,x_2)$ функции по формул,

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{gradG + zot\left[\vec{e}_3 x_1 + rot(\vec{e}_3 x_2)\right]\right\} \qquad (6)$$

уравнения (3) , (4) приведены к виду

$$\Delta G = 0, \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu'\Delta\right), x_1 = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu'\Delta\right), x_2 = 0, \qquad (7)$$

В дальнейшем рассмотрим крутильные колебания слоя. Будем считать, что он загружен только вдоль оси OZ .

Для жидкости положим

$$V_r = V_z = 0, \qquad V_\Theta = V_\Theta = (r, z, t), \text{ p=0}, \quad x_i \in V_2 . \qquad (8)$$

Тогда из условия неразрывности с учетом условия несжимаемости выражений p и p' через G, x_1 и x_2 ,условия (7) и (8) выполняются, если положить

$$G=0,\ x_2=0,\ x_1=x_1(r, z, t) \qquad (9)$$

В случае (10) из (6) получаем для V_Θ представления

$$V_\Theta = -\frac{\partial^2 x_1}{\partial r \partial t}, \qquad x_i \in V_2 , \qquad (10)$$

где функция x_1 является решением уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \upsilon'\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right] x_1 = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (11)$$

Для слоя примем следующее

$$U_r = U_z = 0, \qquad U_\Theta = U_\Theta(r, z, t), \qquad x_i \in V_1 \qquad (12)$$

Условия (12) выполняется, если положить

$$U_\Theta = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \qquad x_i \in V_1 \qquad (13)$$

где функция ψ_1 на основании (2) удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi_1 = \frac{1}{b^2}\psi_1, \qquad x_i \in V_1 \qquad (14)$$

Условия на поверхности слоя при $r=r_2$ и на границе раздела сред при $r=r_1$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{r\Theta}(r_2, z, t) = f_{r\Theta}(z, t), \\ &\sigma_{r\Theta}(r_1, z, t) = p_{r\Theta}(r_1, z, t), \\ &V_\Theta(r_1, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_\Theta(r_1, z, t) \end{aligned} \qquad (15)$$

Начальные условия нулевые.

Таким образом, задача о крутильных колебаниях цилиндрического слоя с вязкой несжимаемой жидкостью приводится к решению уравнений (11), (14) с граничными (15) и нулевыми начальными условиями.

Для решения уравнений (11) и (14) представим функции χ_1 и ψ_1 в виде

$$\left[\chi_{1,}\psi_1\right] = \int_0^\infty \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int_\ell \left[\chi_{10}, \psi_{10}\right] e^{pt} dp. \quad (16)$$

Подстановка, в которых (11) и (14) дает

$$\frac{d^2\psi_{10}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi_{10}}{dr} - \alpha^2\psi_{10} = 0, \;\; \alpha^2 = k^2 + \frac{1}{b^2}p^2,$$

(17)

$$\frac{d^2\chi_{10}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\chi_{10}}{dr} - \beta^2\chi_{10} = 0, \;\; \beta^2 = \kappa^2 + \frac{1}{\nu'}p$$

Общие решения уравнений (17), ограниченные при $r \to \infty$ и $r = 0$ имеют вид

$$\psi_{10}(r) = A_1 I_0(\alpha r) + A_2 K_0(\alpha r),$$

$$\chi_{10} = BI_0(\beta r) \quad (18)$$

Функцию внешних воздействий также представим как

$$f_{ro}(z,t) = \int_0^\infty \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} \left[\chi_{10}, \psi_{10}\right] e^{pt} dp. \quad (19)$$

Выразив напряжения $\sigma_{r\Theta}$ и $p_{r\Theta}$ через введенные потенциалы ψ_1 и χ_1, а также представив их также как (19) из граничных условий (17), получим

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r^2}^2\right]\psi_{10} = \frac{1}{\mu} f_{r\Theta}^{(10)}, \text{ при } r = r_2,$$

(20)

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]\psi_{10} = 2\frac{\mu}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2}\beta^2\right] p\chi_{10},$$

при $r = r_1$. Примем за искомые величины перемещения в точках некоторой промежуточной поверхности цилиндрического слоя, радиус которого определяется по формуле

$$\xi = \frac{r_1}{2}\left[\upsilon - \frac{r_1}{r_2}\right] \quad \upsilon = const. \quad (21)$$

Выразив преобразованное перемещение $U_0^{(0)}$ через ψ_{10} и χ_{10}, подставив в него общие решения (19) и используя стандартные разложения модифицированные функции Бесселя в степенные ряды, пологая в разложениях $r = \xi$ и исходя из его общего вида введем новые функции, зависящие от параметров к и р по формулам

$$U^{(0)}{}_{\Theta,0}=-\frac{1}{2}\alpha^2\left\{A_1-A_2\left[Ln\frac{\alpha\xi}{2}-\psi(1)-\frac{1}{2}\right]\right\},\quad U_{\Theta,0}{}^{(0)}=\frac{1}{\xi}A_2. \quad (22)$$

Где Ψ - “пси” функция Эйлера.

Подставив решения (19) в граничные условия получим

$$\alpha^2\left[A_1I_1(\alpha r_1)+A_2K_2(\alpha r_2)\right]=-\mu^{-2}f^{(0)}{}_{r\Theta}, \qquad (23)$$

$$\frac{2}{r_1}\left[A_1I_1(\alpha r_1)+A_2K_2(\alpha r_2)\right]=-\alpha\left[A_1I_0(\alpha r_1)+A_2K_0(\alpha r_2)\right]=$$

$$-\frac{\mu'}{4\mu}\beta^2pr_1\alpha^2\left[A_1I_1(\alpha r_1)+A_2K_1(\alpha r_2)\right] \quad (24)$$

Используя стандартные разложения функций Бесселя в степенные ряды по степеням r_1 и r_2, а также подставляя выражения постоянных A_1 и A_2 по формулам (23) и вводя функции $U_{\Theta,0}$ и $U_{\Theta,1}$ и операторы λ^n по формулам

$$\left[U_{\Theta,0},U_{\Theta,1}\right]=\int_0^\infty \left.\begin{matrix}Sinkz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(l)}\left[U_{\Theta,0}{}^{(0)},U_{\Theta,1}{}^{(0)}\right]e^{pt}dp. \qquad (25)$$

$$\lambda^n(\varsigma)=\int_0^\infty \left.\begin{matrix}Sinkz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}\ dk\int_{(l)}\left[\ \lambda^{2n}(\varsigma)\ \right]e^{pt}dp\,. \quad (26)$$

из условий (23), (26) получим уравнения

$$C_{11}U_{\Theta,0}+C_{12}U_{\Theta,1}=\mu^{-1}f_{r\Theta,}$$

$$(C_{12}-RC_{31})U_{\Theta,0}+(C_{22}-RC_{32})U_{\Theta,1}=0, \quad (27)$$

где операторы C_{ij} имеют вид

$$C_{1i}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!}\lambda_2{}^n,........$$

Здесь R-представляет собой реакцию вязкой несжимаемой жидкости на колебания оболочки

$$R=\frac{r_1}{4}\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]. \quad (28)$$

Исходя из выражения

$$\alpha^2=k^2+\frac{1}{b^2}p^2$$

нетрудно заключить, что операторы λ^n в переменных (z,t) равны

$$\lambda^n=\left[\frac{1}{b^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n,\ \text{n=1,2,3,…} \quad (29)$$

В соответствии с (29) уравнения (26) являются дифференциальным уравнением бесконечно высокого порядка относительно главных частей крутильного перемещения точек промежуточной поверхности цилиндрического упругого слоя с вязкой несжимаемой жидкостью.

Выводы

Таким образом, нетрудно выразить перемещение U_{Θ} и напряжения $\sigma_{r\Theta}, \sigma_{z,\Theta}$ внутренних сечений слоя и давления, $P_{r,\Theta}$ через $U_{\Theta,0}, U_{\Theta,1}$, которые по результатам решения уравнений (26) позволяют определить напряженно-деформированное состояние произвольного сечения слоя и напряжения на поверхности жидкости. Заметим, что бесконечно высокий порядок уравнений делает их непригодными для решения прикладных задач. Поэтому, считая выполняемые условия, полученные в более ранних работах налагаемые на частоту колебаний и волновое число, распространяющихся волн можно ограничиться нулевым (n=0), первым (n=1) и другими приложениями можно получить уравнения колебания пригодные для решения инженерных задач.

Литература

1. Гуз А. Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями. -Прикл. механика 2013,, 16, №3, с.3-21.
2. Гуз А. Н Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью. -Прикл. механика 2016, 16, №10, с.10-20.
3. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.
4. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебание стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11
5. Д.В.Кондратов, Ю.Н. Кондратова, Л.И. Могилевич. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №3. С. 15-21
6. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условиях вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1 (26). С. 22-31.
7. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106. Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках http://mathmod.esrae.ru/ 2017, №3 ISSN 2541-9269
9. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 346-350.
10. Sanjaridin Z., Temur X. METHODS OF CREATING VIRTUAL LABORATORIES IN THE" LABVIEW" PROGRAM //Science and Innovation. – 2023. – Т. 2. – №. 11. – С. 519-523.

11. Zoirov S. et al. MODELING OF PHYSICAL PROCESSES IN THE LABVIEW PROGRAM //Science and Innovation. – 2022. – Т. 1. – №. 8. – С. 775-780.
12. Зоиров, Санжаридин. "Yarimo ‘tkazgichli tranzistorlarni LabWIEV dasturida yig‘ish va foydalanish metodikasi." *Общество и инновации* 5.1/S (2024): 154-160.