Impact Factor: 9.2 ISSN-L: 2544-980X

Квадратичные Стохастические Операторы, Построенные По Модели Поттса

Х. Ж. Мейлиев [1], *М. К. Пошокулова* [2]

Аннотация: В этой работе формулируются квадратичные стохастические операторы на Потиссе по модулю a. Определены точечные стационарные и точечные асимптотические разрывы, определены притягивающие или отталкивающие нестационарные тонкости.

Ключевые слова: Квадратичные стохастический операторы, Менделеевские операторы, траектории квадратичные стохастический операторы, коэффициент наследованной, состоянием популяции, распределений вероятностей, множество, мера, симплек, отображение, стохастическим, частоты генотипов, поколения, неподвижное точке.

Введение

Понятие квадратичного стохастические оператора, в первые было дано в работе С.Н.Бернштейна [1], посвященной решению одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Квадратичные операторы как объект исследования появились на рубеже тридцатых годов в работах Улама [2], где была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекурренций при изучении траекторий инеобходимость проведения очень большого числа вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче. Создание ЭВМ в сороковых годах возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Улам и его сотрудники провели вычисления на ЭВМ для достаточно большего числа квадратичных операторов.

Квадратичные стохастические операторы появляются в весьма различных областях математики и ее приложений: теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, математической биологии и других.

Теория квадратичных стохастических операторов развивалась в течение более 87 лет и было опубликовано минного работ.

Квадратичный стохастический оператор (КСО) свободой популяции имеет следующий смысл:

Рассмотрим некоторою биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предположим, что каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой единственной из n разновидностей 1,2,3,…,n. Шкала разновидностей (признаков, фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей *i* и *j* однозначно определяли вероятность каждой разновидности *k* для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («Коэффициент наследованности») через $P_{ij,k}$.Очевидно что в этом случае выполнены условия:

$P_{ij,k} \geq 0, \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1$, для всех *i,j,k*

Предположим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флюктуациями частот. Тогда ее состояния можно описывать набором $x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$ вероятностей разновидностей. т.е. x_i есть доля разновидности *i* в популяции.

При так называемой панмиксии или случайном скрещивании при фиксированном состоянии $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ родительские пары i и j образуются с вероятностью $\mathrm{x}_\mathrm{i}\mathrm{x}_\mathrm{j}$ и, следовательно,

$$x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j \qquad (1)$$

будет полной вероятностью k среди непосредственных потомков.

[1] Каршинский институт ирригации и агротехнологий, 180003 Карши, Узбекистан
[2] Каршинский институт ирригации и агротехнологий, 180003 Карши, Узбекистан

Множество $S^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n):\ x_i\geq 0,\quad i=1,2,...,n,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$ (2)

называется $n-1$ -мерным симплексом и, так как $\sum_{k=1}^{n}x_k^{'}=1$ и $x_k^{'}\geq 0$, то отображение (2) называется квадратичным стохастическим оператором, переводит симплекс S^{n-1} в себя.

где $P_{ij,k}$ -коэффициент наследованности удовлетворяют условия:

$$P_{ij,k}\geq 0,\qquad \sum_{k=1}^{n}P_{ij,k}=1\quad ,\quad i,j,k. \tag{3}$$

Среди математических моделей генетики важную роль играют модели, порожденные квадратичными операторами. Траектория $\{(x^{(t)})\}_{t=0}^{\infty}, t = 1,2,...$ для $x^{(0)}\in S^{n-1}$под действием КСО (2) определяется следующим образом:

$$x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), n = 0,1,2,...$$

Одна из основных задач для данного оператора в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. Это проблема была полностью решена для вольтеровских КСО которые определяются равенствами (1) ,(3) и дополнительным предположением

$$P_{ij,k} = 0, \text{если } k \overline{\in} \{i,j\} \tag{4}$$

В настоящий работе мы рассматриваем квадратичные стохастический операторы построенные по модели Поттса.

На множестве клеток Ω рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma)=-\ \Im\sum_{<x,y>}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{I.3.I}$$

Где суммирование проводится по соседним вершинам $<x,y>$ и $\Im\in$, в статистической механике модель, описываемая гамильтонианом (I.3.I), называется моделью Поттса, при этом, если $\Im>0$, модель называется ферромагнитной, в противном случае-антиферромагнитной. Гиббсовское распределение, соответствующее этому гамильтониану, задается следуюшим образом:

$$\mu(\sigma)=-\exp(-H(\sigma))/Z$$

Где $Z=\sum_{\sigma\in\Omega}\exp(-H(\sigma))$.

Если $\Im=0$ или множество ребер графа пусто, то мера μ, очевидно, будет являеться равномерным распределением на Ω.

В данном параграфе рассмотрим случай, когда граф (Λ,L) состоит из двух вершин, соединенных одним ребром. Тогда Ω состоит из следующих пар $\sigma_1=(A,A);\sigma_2=(A,\alpha);\sigma_3=(\alpha,A);\sigma_4=(\alpha,\alpha)$.

Квадратичный стохастический оператор V, задаваемый равенствами (I.I.3), в этом случае имеет следующий вид: если $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ -распределение на Ω и $\lambda^{'}=V\lambda$, то

$$\lambda_1^{'}=\lambda_1(\lambda_1+\lambda_4+\theta e^{\Im}(\lambda_2+\lambda_3)) \tag{I.3.3}$$

$$\lambda_2^{'}=\lambda_2(\lambda_2+\lambda_3+\theta e(\lambda_1+\lambda_4)),$$

$$\lambda_3^{'}=\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3+\theta e(\lambda_1+\lambda_4)),$$

$$\lambda_4^{'}=\lambda_4(\lambda_1+\lambda_4+\theta e^{\Im}(\lambda_2+\lambda_3)),$$

Где $\theta=2/(e^{\Im}+1)$.

Положим $\lambda_2+\lambda_3=x, \lambda_1+\lambda_4=1-x$.

Система (I.3.3) в этих обозначениях сводится к следующему

$$f(x)=x^{'}=(1-\theta)x^2+\theta x. \qquad \text{(I.3.4)}$$

Тогда каждая неподвижная или периодическая точка отображения (I.3.4)

Определяет множества неподвижных или периодических точек отображения (I.3.3).

Рассмотрим

$$x=(1-\theta)x^2+\theta x. \qquad \text{(I.3.5)}$$

Очевидно, что при $\Im\neq 0$ $x=0$ и $x=1$ являются решениями (I.3.5) и при $\Im=0$ произвольная точка является неподвижной точкой отображения (I.3.4). Заметим, что

$$\begin{cases} f^{'}(0)<1, f^{'}(1)>1, если \Im>0 \\ f^{'}(0)=f^{'}(1)=1, если \Im=0 \\ f^{'}(0)>1, f^{'}(1)<1, если \Im<0 \end{cases}.$$

Следовательно, при $\Im>0$ точка $x=0$-притягивающая, а $x=1$-отталкивающая; при $\Im=0$ все точки неподвижные, а при $\Im<0, x=1$ - притягивающая, а $x=0$ - отталкивающая.

Таким образом, если $x_0\geq 0$ произвольая точка, то

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0)=\begin{cases} 0, если \Im>0 \\ x_0, если \Im=0 \\ 1, если \Im<0 \end{cases}. \qquad \text{(I.3.6)}$$

Положим $S^{(1)}=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in S(\Lambda,\Phi):\lambda_2=\lambda_3=0\}$ и

$S^{(2)}=\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in S(\Lambda,\Phi):\lambda_1=\lambda_4=0\}$.

В силу (I.3.3) нетрудно проверить, что для любого распределения $V\lambda=\lambda$, и при $\Im=0$ $V\lambda=\lambda$ для любого распределения $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$. Для точки $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$ рассмотрим траекторию квадратичного оператора V (I.3.3) : $\lambda^{(n)}=V\lambda^{n-1)}, n=1,2,\ldots$, где $\lambda^{(0)}=\lambda$. В силу (I.3.6) при $\Im>0$ траектория любой точки $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$ сходится к некоторой точке множества $S^{(1)}$, и при этом, эсли $\lambda\in S^{(1)}$, то эта точка неподвижна: при $\Im=0$ любая точка $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$ неподвижна и при $\Im<0$ траектория любой точки $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)$ сходится к некоторой точке множества $S^{(2)}$, и при этом, если $\lambda\in S^{(2)}$, то эта точка неподвижна. Таким образом, справедлива следующая

Теорема I.3.I для квадратичного стохастического оператора (I.3.3) справедливы следующие утверждения:

1) При $\Im=0$ все точки симплекса $S(\Lambda,\Phi)$ неподвижны;
2) Для любого $\Im$, произьволная точка $\lambda\in S^{(1)}\cup S^{(2)}$ является неподвижной.
3) При $\Im>0$($\Im<0$) траектория любой точки $\lambda\in S(\Lambda,\Phi)\setminus(S^{(1)}\cup S^{(2)})$ сходится к некоторой точке $\breve{\lambda}\in S^{(1)}(\breve{\lambda}\in S^{(2)})$

Литературы.

1. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. квфедр. Украины, отд.матем.,1924,вып.Iс 83-115.,
2. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турнира//Мат.Сб.-1992.-83,№8.-С.119-140.

3. Ганиходжаев Р.Н. Карта неподвижных точек функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем//Мат. Заметки.-1994.-56.-С.1125-1131.
4. Ганиходжаев Н.Н.,Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичных опeратров.//ДАН РУз, 1997.
5. LyubichYa.I. Mathematical structures in populationgenettes//Biomathematics -1992. 22//.
6. У.А.Розиков, У.У. Жамилов. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции.//Укр.мат.жур.,2001.м 63.№7//
7. Розиков У.А.Жамилов У.У.О динамике строго невольтеровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе.//Мат.сб.-2009.-200,№9.-с.81-94.
8. Генетика и наследственность.//Сб.статей. М.,1987.300 с.