Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Giperbolik Differensial Tenglamalarni Ye-chishda Lax-Vendroff Sxemasining Sonli Tahlili

Imomova Shafoat Mahmudovna [1], *Naimova Maxzuna Quvondiq qizi* [2]

Annotasiya: Hisoblash matematikasi va fizikada differensial tenglamalarni sonli yechish muammosi dolzarb bo‘lib qolmoqda. Shu sohada keng qo‘llaniladigan, ammo kam to‘liq o‘rganilgan usullardan biri bu Lax-Vendroff sxemasi bo‘lib, uning turg‘unligi, dispersiya xatolari va amaliy qo‘llashdagi afzalliklari hali ham to‘liq o‘z yechimini topmagan. Ushbu maqolada Lax-Vendroff sxemasining nazariy asosi, ikkinchi tartibli aniqlik xususiyati, turg‘unlik (CFL sharti) va soxta tebranishlarga olib keluvchi dispersiya ta'siri batafsil tahlil qilinadi. Sxema Teylor qatorlari va markaziy ayirmali hosila formulalari asosida hosil qilinib, adveksiya va transport tenglamalari uchun qo‘llaniladi. Tahlil natijalariga ko‘ra, Lax-Vendroff sxemasi yuqori aniqlik va oddiy algoritmik tuzilishga ega bo‘lib, gaz dinamikasi, gidrodinamika, elektromagnit to‘lqinlar va zilzila to‘lqinlarini modellashtirishda samarali qo‘llanilmoqda. Shu bilan birga, amaliy hisoblashlarda turg‘unlik va dispersiyani kamaytirish uchun boshqa stabilizatsion usullar bilan birgalikda ishlatish tavsiya etiladi.

Kalit so‘zlar: Lax-Vendroff sxemasi, adveksiya tenglamasi, differensial tenglamalar, turg‘unlik, dispersiya, Teylor qatori, markaziy ayirmali hosila.

Kirish. Hisoblash matematikasi va hisoblash fizikasi sohasida differensial tenglamalarni yechish uchun turli xil usullar ishlab chiqilgan. Ularning ichida Lax-Vendroff sxemasi muhim o‘rin tutadi. Bu usul asosan giperbolik turdagi xususiy hosilali tenglamalarni yechishda qo‘llaniladi. Lax-Vendroff sxemasi differensial tenglamalarni yechishda qo‘llaniladigan sonli usullardan biri bo‘lib, u ayniqsa transport va to‘lqin tenglamalarini yechishda samarali hisoblanadi. Lax-Vendroff sxemasi vaqt bo‘yicha va ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan sonli usullardan biri hisoblanadi. Ushbu maqolada Lax-Vendroff sxemasining nazariy asosi, uning turg’unlik shartlari va amaliy qo‘llanilishi haqida batafsil ma’lumot beramiz.

Metodlar. Lax-Vendroff sxemasi bir o‘lchovli adveksiya tenglamasini yechishda keng qo‘llaniladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

bu yerda $u(x,t) -$ funksiyaning qiymati, c – doimiy tezlik va $x, t -$fazoviy va vaqt o‘zgaruvchilari. Lax-Vendroff usuli Teylor qatori yoyilmasi va markaziy ayirmali hosilalar ifodalari yordamida hosil qilinadi. Tayyor qatorni tahlil qilar ekanmiz:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)$$

bu yerda yuqori tartibli hosilalarni differensial tenglamadan foydalanib ifodalash mumkin. Birinchi tartibli hosila

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}$$

[1] Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari kafedrasi dotsenti (O’zbekiston)

[2] Buxoro davlat universiteti Amaliy matematika (sohalar bo’yicha) mutaxassisligi magistri (O’zbekiston)

bo‘lsa, ikkinchi tartibli hosila uchun tenglamani yana bir marta differensiallash orqali quyidagi ifodani olamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

x bo’yicha hosilalar uchun markaziy ayirmali hosila ifodalaridan foydalanamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Bu ifodalarni yuqoridagi Teylor qatori yoyilmasiga qo‘yib, markaziy ayirmali hosila ifodasidan foydalansak, quyidagi Lax-Vendroff sxemasi hosil bo‘ladi:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Lax-Vendroff sxemasining xususiyatlari

Ikkinchi tartibli aniqlik

Lax-Vendroff sxemasi vaqt va fazoviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha ikkinchi tartibli aniqlikka (second-order accuracy) ega. Bu uni Eylerning birinchi tartibli sxemalariga qaraganda aniqroq qiladi.

Iteratsion usul

Sxema ekspilit bo‘lib, u har bir vaqt qatlamidagi u_i^{n+1} qiymatini oldingi qatlamidagi u_i^n qiymatlar orqali hisoblab chiqadi. Bu hisoblash jihatidan osonroq bo‘lsa-da, turg’unlik muammolari paydo bo‘lishi mumkin.

Turg’unlik va CFL sharti

Lax-Vendroff sxemasi Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) sharti bajarilganida tug’un bo‘ladi:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Bu shart bajarilmasa, hisoblash natijalari noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin (yechim “portlash”i yoki noaniq tebranishlar paydo bo‘lishi).

Dispersiya va soxta tebranishlar

Lax-Vendroff sxemasining kamchiliklaridan biri soxta tebranishlar (numerik dispersiya) muammosidir. Bu ayniqsa keskin o‘tishlar yoki zarbali to‘lqinlari mavjud bo‘lganda kuzatiladi.

Natijalar va munozara. Lax-Vendroff sxemasining qo‘llanilishi

Lax-Vendroff sxemasi turli ilmiy va muhandislik sohalarida keng qo‘llaniladi:

Gaz dinamikasi – Gaz oqimlarining sonli modellashtirilishida qo‘llaniladi, ayniqsa, Euler tenglamalari uchun.

Elektromagnit to‘lqinlar – Maksvel tenglamalarining yechimini hisoblashda ishlatiladi.

Gidrodinamika – Suv oqimlarini modellashtirish uchun qo‘llaniladi, masalan, Shallow Water Equations (SWEs).

Okean va atmosfera fizikasi – Atmosfera oqimlari va okean to'lqinlarini modellashtirishda ishlatiladi.

Zilzila to'lqinlari – Geofizik jarayonlarni o'rganishda qo'llaniladi.

Quyidagi jadvalda Lax-Vendroff sxemasi boshqa usullar bilan solishtirilgan(1-jadval).

1-jadval

Usul	Aniqlik	Turg'unlik	Dispersiya muammosi
Euler sxemasi	Birinchi tartibli	Doim ham turg'un emas	Kam
Lax-Vendroff sxemasi	Ikkinchi tartibli	CFL sharti kerak	Bor
Upwind sxemasi	Birinchi tartibli	turg'un	Yo'q, lekin diffuziya mavjud
TVD (Total Variation Diminishing) sxemalar	Ikkinchi tartibli	turg'un	Kam yoki yo'q

Agar yechimni topishda aniqlik darajasi muhim bo'lsa, Lax-Vendroff sxemasi yaxshi tanlov bo'ladi, ammo agar keskin o'tishlar yoki zarbali to'lqinlar mavjud bo'lsa, dispersiya muammosi sababli TVD yoki Upwind sxemalar afzalroq bo'lishi mumkin.

Xulosa va tavsiyalar. Lax-Vendroff sxemasi yuqori tartibli aniqlikka ega bo'lgan sonli hisoblash usuli bo'lib, u transport va to'lqin tenglamalarining yechimini topishda samarali hisoblanadi. Uning asosiy kamchiligi dispersiya ta'siri natijasida soxta tebranishlarning yuzaga kelishidir. Shu sababli, amaliy muammolarni yechishda ushbu sxemani boshqa stabilizatsiya usullari bilan birgalikda qo'llash tavsiya etiladi.

Lax-Vendroff sxemasi ilmiy hisoblash va muhandislik sohalarida muhim ahamiyat kasb etib, ko'plab mavjud muammolarni modellashtirishda qo'llanilmoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. LeVeque, R. J. – Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations (2007)
2. Strikwerda, J. C. – Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (2004)
3. Imomova Shafoat Mahmudovna, Mardonova Maftunabonu Abrorovna. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING ANIQ USULLARI VA TADBIQLARI// Educational Research in Universal Sciences. VOLUME 3 | SPECIAL ISSUE 2 | 2024, C.397-404
4. A. Hayotov, S. Babaev, N.Olimov, and Sh.Imomova, "The error functional of optimal interpolation formulas in W2(,2σ,1) space," AIP Conference Proceedings 2781, 020044 (2023), https://doi.org/10.1063/5.0144752.
5. Samandar Babaev, Nurali Olimov, Shafoat Imomova, and Bekhruzjon Kuvvatov, "Construction of Natural L Spline in W2(,2σ,1) Space" , AIP Conf. Proc. 3004, 060021 (2024)https://doi.org/10.1063/5.0199595
6. Imomova Sh.M., Amonova N.A. Chekli elementlar usullari// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 3, 2024, C.73-81.
7. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Maple matematik tizimida differensial tenglamalarni yechish// Fizika, matematika va informatika №2, 2024 C. 56-64.
8. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan Mathcad muhitida sonli yechish// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 5, 2024, C.30-35.

9. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Koshi masalasini taqribiy yechish// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 9, 2024, C.39-46.
10. Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H. – On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics (1928)