Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

ИСЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ГРАВИТАЦИОННО-РЕПУЛЬСВНОМ ПОЛЕ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

Турлугулова Н.А.1, Кабдолдина Н.О.1 , Матжанов А.О.2 ,Турешбаев А.Т.2

Кызылординский университет имени Коркыт Ата

E-mail: jannur-08.73@mail.ru, naz_82k@mail.ru, Apollonkz@ gmail.com, aturesh@mail.ru,

Аннотация. Настоящая работа посвящена ограниченной задаче трех тел, в которой основные тела обращаются вокруг общего центра масс по круговой орбите. При этом оба основных тела являются источниками излучения световой энергии. Рассматриваются периодические движения пассивно гравитирующей точки в малой окрестности основных тел. Вблизи треугольных точек либрации, отвечающих точным решениям соответствующей системы дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел с двумя изучающими были найдены многопараметрические периодические решения задачи.

Установлено, что возможные периодические движения являются плоскими, расположенными в плоскости орбитального движения основных излучающих тел. В работе доказано, что траектории движения частиц в окрестности исследуемых треугольных точек будут эллипсами, полуоси которых зависят от параметров фотогравитационного поля, создаваемого двумя основными излучающими телами.

Введение. Как известно, многими авторами [1,2] были исследованы периодические движения частиц вблизи точек либрации классической ограниченной задачи трех тел. В работах [3,4] впервые сформулирована и доказана общая теорема о существовании ляпуновских семейств симметричных периодических движений и строго математически обоснован конструктивный метод численного построения и исследования их устойчивости в обратимой системе. Построение траекторий путем численного интегрирования системы уравнений, поиск симметричного периодического решения, а также способ исследования устойчивости орбиты вокруг коллинеарных точек либрации ограниченной фотогравитационной задачи трех тел успешно реализованы в работе [4].

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Поставим задачу определения периодических движений вблизи треугольных точек либраци L_4 и L_5 ограниченной фотогравитационной круговой задачи, дифференциальные которой имеют вид

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\frac{\partial W}{\partial x},\ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial W}{\partial y},\ddot{z}=\frac{\partial W}{\partial z},$$
$$W=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{q_1(1-\mu)}{r_1}+\frac{q_2\mu}{r_2}, \tag{1}$$
$$r_1^2=(x+\mu)^2+y^2+z^2, r_2^2=(x+\mu-1)^2+y^2+z^2,$$

Здесь q_1 и q_2 - коэффициенты редукции, зависящие от мощности излучения основных тел и парусности частицы, определяемой отношением «сечение/масса», $1-\mu$ и μ - безразмерные массы основных тел. Ниже приводятся области устойчивости треугольных точек либрации в конфигурационном пространстве для некоторых фиксированных значений массового параметра μ:

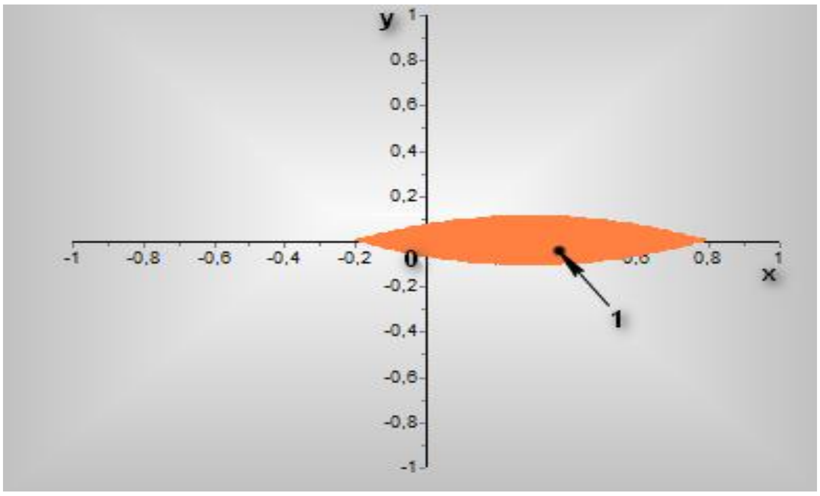

Рис.1.Области устойчивости треугольных точек либрации
при резонансе 3-го порядка ($\mu=0,2$)
1 – область устойчивости в линейном приближении.

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

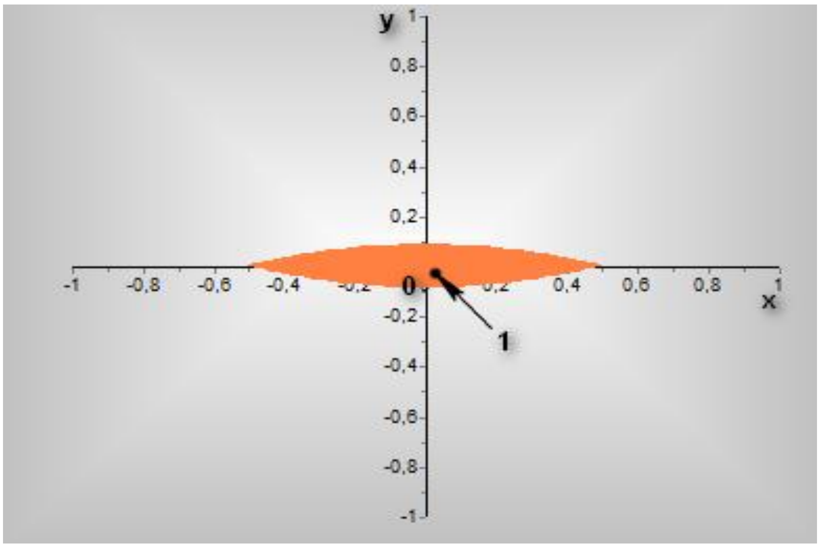

Рис.2.Области устойчивости треугольных точек либрации
при резонансе 3-го порядка ($\mu = 0{,}5$)
1 – область устойчивости в линейном приближении.

Диференциальные уравнения возмущенного движения системы, близкие к треугольным точкам либрации.

Для получения уравнений возмущенного введем обозначения

$$x=x_j+\xi,\ \ y=y_j+\eta,\ \ z=z_j+\zeta \quad (j=1,2),$$

где $x_{j,}$ $y_{j,}$ z_j – координаты треугольных точек, которые подставляя в систему (1), получим уравнения возмущенного движения относительно отклонений ξ, η и ζ, решения полученных уравнений ищем в виде рядов, расположенных по степеням некоторой произвольной постоянной с коэффициентами, представляющими 2π-периодические функции времени. Применяя метод, предложенный А.М. Ляпуновым [1], запишем уравнения, определяющие первые коэффициенты искомых рядов

$$\frac{d^2\xi^{(1)}}{d\tau^2}-\frac{2}{\lambda}\frac{d\eta^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left(a_{xx}\xi^{(1)}+a_{xy}\eta^{(1)}\right),$$
$$\frac{d^2\xi^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{2}{\lambda}\frac{d\xi^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left(a_{xy}\xi^{(1)}+a_{yy}\eta^{(1)}\right), \qquad (2)$$
$$\frac{d^2\zeta^{(1)}}{d\tau^2}=\frac{1}{\lambda^2}a_{zz}\zeta^{(1)}$$

Решение системы (2) ищем в виде

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

$$\zeta^{(1)} = a'' \cos\tau + b'' \sin\tau, \qquad \eta^{(1)} = a' \cos\tau + b' \sin\tau,$$
$$\xi^{(1)} = a\cos\tau + b\sin\tau, \tag{3}$$

и для определения в них неизвестных коэффициентов подставив уравнения (3) в систему (2) имеем

$$\begin{gathered}
\left(1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}\right)a + \frac{a_{xy}}{\lambda^2}a' + \frac{2}{\lambda}b' = 0, \quad \left(1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}\right)b - \frac{2}{\lambda}a' + \frac{a_{xy}}{\lambda^2}b' = 0,\\
\frac{a_{xy}}{\lambda^2}a - \frac{2}{\lambda}b + \left(1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}\right)a' = 0, \ \frac{2}{\lambda}a + \frac{a_{xy}}{\lambda^2}b + \left(1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}\right)b' = 0,\\
\left(1+\frac{a_{zz}}{\lambda^2}\right)a'' = 0, \ \left(1+\frac{a_{zz}}{\lambda^2}\right)b'' = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{xx} &= W_{xx} = 3\left[q_1(1-\mu)(x+\mu)^2/r_1^2 + q_2\mu(x+\mu-1)^2/r_2^2\right],\\
a_{yy} &= W_{yy} = 3y^2\left[q_1(1-\mu)/r_1^2 + q_2\mu/r_2^2\right],\\
a_{xy} &= W_{xy} = 3y\left[q_1(1-\mu)(x+\mu)/r_1^2 + q_2\mu(x+\mu-1)/r_2^2\right],,\\
a_{zz} &= W_{zz} = -1.
\end{aligned}$$

Первые четыре уравнения системы (4) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&Aa + 0 + Ba' + Cb' = 0,\\
&0 + Ab - Ca' + Bb' = 0,\\
&Ba - Cb + Da' + 0 = 0,\\
&Ca + Bb + 0 + Db' = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$A = 1+\frac{a_{xx}}{\lambda^2}, \quad B = 1+\frac{a_{yy}}{\lambda^2}, \quad C = \frac{2}{\lambda}, \quad \mathrm{D} = 1+\frac{a_{xy}}{\lambda^2}$$

Определители системы (5) и двух последних уравнений (4) имеют вид:

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} A & 0 & B & C\\ 0 & A & -C & B\\ B & -C & D & 0\\ C & B & 0 & D \end{vmatrix} = \left\{\frac{1}{\lambda^4}\left[(\lambda^2 + a_{xx})(\lambda^2 + a_{yy}) - a_{xy}^2 - 4\lambda^2\right]\right\}^2, \tag{6}$$

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

$$\Delta_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda^4}(\lambda^2 + a_{zz})^2.$$

Характеристическое уравнение исследуемой системы распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} \lambda^4 + (4 - a_{xx} - a_{yy})\lambda^2 + a_{xx}a_{yy} - a_{xy}^2 = 0, \\ \lambda^2 - a_{zz} = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Первое из (7) имеет две пары чисто мнимых корней при выполнении условий

$$0 \le \mu(1-\mu)\sin^2(\varphi_1 + \varphi_2) \le \frac{1}{36}, \qquad (8)$$

где φ_1, φ_2 и x, y, r_1, r_2 между собой связаны следующими выражениями [3]:

$$\sin\varphi_1 = \mathrm{y}/\mathrm{r}_1, \cos\varphi_1 = (\mathrm{x}+\mu)/\mathrm{r}_1,$$
$$\sin\varphi_2 = \mathrm{y}/\mathrm{r}_1, \cos\varphi_2 = -(\mathrm{x}+\mu-1)/r_2,$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего первому из (7), могут быть записаны как [4]

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\omega_2,$$

где $$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(4 - a_{xx} - a_{yy}) - \sqrt{(4 - a_{xx} - a_{yy})^2 - 4(a_{xx}a_{yy} - a_{xy}^2)}},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(4 - a_{xx} - a_{yy}) - \sqrt{(4 - a_{xx} - a_{yy})^2 + 4(a_{xx}a_{yy} - a_{xy}^2)}} \qquad (9)$$

С учетом (7) и (9) нетрудно установить, что определители системы (4) относительно коэффициентов равны

$$\Delta_1(\lambda_1 = 0), \Delta_1(\lambda_2 = 0), \Delta_2(\lambda_1) \ne 0, \Delta_2(\lambda_2) \ne 0 \qquad (10)$$

Теперь легко установить, что система первых четырех уравнений системы (4) имеет решения, в которых все искомые величины не равны одновременно нулю, а два её последних уравнения имеют только тривиальное решение. Поэтому функция $\zeta^{(1)}$ равна нулю тождественно, а так как всякая функция $Z^{(k)}$ имеет множители ζ, то любая $\zeta^{(\kappa)}$ равна тождественно нулю, т.е.

$$\zeta \equiv 0, \qquad (11)$$

и, следовательно, рассматриваемое периодическое решение – плоское.

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Таким образом, коэффициенты a'' и b'' системы (4) равны нулю. Чтобы найти $\xi^{(1)}$ и $\eta^{(1)}$ нужно определить постоянные a, b, a′, b′ из системы уравнений (4).

Элементарный анализ этих уравнений позволяет получить, что

$$a_1' = -\frac{a_{xy}}{\omega_1^2 + a_{yy}},\ b_1' = -\frac{2\omega}{\omega_1^2 + a_{yy}},\ a_2 = -\frac{a_{xy}}{\omega_2^2 + a_{xx}},\ b_2 = \frac{2\omega}{\omega_2^2 + a_{xx}}, \quad (12)$$

Первые два периодических решения системы определяются формулами

$$\begin{cases} \xi_1 = \cos\tau + c^2\xi_1^{(2)} + c^3\xi_1^{(3)} + \dots \\ \eta_1 = c(a_2'\cos\tau + b_2'\sin\tau) + c^2\eta_1^{(2)} + c^3\eta_1^{(3)} + \dots \\ \zeta_1 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \xi_2 = c(a_2\cos\tau + b_2\sin\tau) + c^2\xi_2^{(2)} + c^3\xi_2^{(3)} + \dots \\ \eta_2 = c\cos\tau + c^2\eta_2^{(2)} + c^3\eta_2^{(3)} + \dots \\ \zeta_2 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Ограничиваясь только членами первого порядка относительно с в уравнениях (13) и (14), получим

$$\cos\tau = \frac{\xi_1}{c},\quad \cos\tau = \frac{\eta_2}{c},\quad \sin\tau = \frac{\eta_1 - a_1'\xi_1}{cb_1'},\quad \sin\tau = \frac{\xi_2 - a_2\eta_2}{cb_2},$$

где

$$a_2 = -a_{xy}/(\omega_2^2 + a_{xx}),\ \mathrm{b}_2 = 2\omega_2(\omega_2^2 + a_{xx}),\ \mathrm{a}_1' = \\ = -a_{xy}(\omega_1^2 + a_{yy}),\ \mathrm{a}_1' = -2\omega_1(\omega_1^2 + a_{yy}).$$

a - произвольный параметр, в качестве которого может быть принято начальное отклонение, например, величины ξ.

Уравнения орбит, соответствующих каждому из решений (10) и (11), приближенно могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{\xi_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{a_1'\xi_1 - \eta_1}{cb_2'}\right)^2 = 1,\qquad \left(\frac{\xi_2 - a_2\eta_2}{cb_2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{c}\right)^2 = 1 \quad (15)$$

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Как видим, каждое из уравнений (15) представляет уравнение эллипса с центром, расположенным в области семейства устойчивых треугольных точек либрации. Следовательно, найденным периодическим решениям соответствует трехпараметрическое семейство замкнутых эллиптических орбит, окружающих треугольные точки и расположенные в плоскости орбитального движения, которые сохраняют свои формы во вращающейся вместе с основными телами системе координат, а их размеры зависят от интенсивности излучения основных тел и парусности частицы. Функции $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ будут периодическими функциями времени с периодами

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}\left[1 + h_1^{(1)}c^2 + \ldots\right],\ T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}\left[1 + h_2^{(2)}c^2 + \ldots\right]$$

Рассматриваемая задача является наиболее важной с точки зрения приложений в звездной динамике: на её основе можно эффективно строить промежуточные орбиты космических газопылевых облаков в поле двойных звездных систем.

Выводы. Рассматриваемая задача является наиболее важной с точки зрения приложений в звездной динамике: на её основе можно эффективно строить промежуточные орбиты космических газопылевых облаков в поле двойных звездных систем.

Установлено, что траектории движения частиц газопылевых облаков в окрестности исследуемых точек представляет собой эллипсы, полуоси которых зависят от параметров гравитационно-репульсивного поля в межзвездном пространстве.

Доказано, что возможные периодические движения частиц газопылевых облаков являются плоскими, расположенными в плоскости орбитального движения двойной звезды.

Результаты исследования в частном случае задачи могут быть использованы при изучении движения космических аппаратов в системе «Солнце-Планета».

Литература:

1. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.

2. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Об устойчивости периодических движений, близких к лагранжевым решениям. – Астрономический журнал, 1977, т.54, №2.

3. Тхай В.Н. Неподвижные множества и симметричные периодические движения обратных механических систем. ПММ. 1996. т.60. Вып.6, с.979-991.

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

4. Тхай В.Н. Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе. ПММ. 2000. т.64. 1. с.46-58.