Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С ОДНОЙ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ МАССОЙ

Турешбаев А.Т.[1], Турлугулова Н.А.[1], Галымжанкызы А.[2], Матжанов А.О.[2]

Кызылординский университет имени Коркыт Ата
E-mail: aturesh@mail.ru, jannur-08.73@mail.ru, asem.
galymzhankyzy@gmail.com, Apollonkz@ gmail.com

Анотация. В работе рассматриватся устойчивость облачных скоплений газопылевых частиц в гравитационно-репульсивном поле Солнце-Планета. В качестве динамической модели рассматривается ограниченная задача трех тел, в которой одно их основных тел является излучающим. Рассматривается устойчивость прямолинейных решений задачи, называемых также коллинеарными точками либрации в строго нелинейной постановке. Установлено, что при резонансе четвертого порядка в плоской задаче исследуемые точки устойчивы по Ляпунову. При этом устойчивыми могут быть только внутренние коллинеарные точки либрации. Численный анализ неравенств позволяет строить область устойчивости для произвольного значения массы μ. Справедливо следующее утверждение: в ограниченной плоской задаче трех тел с одной излучающей массой коллинеарные точки всюду устойчивы по Ляпунову из области устойчивости в линейном приближении. Исключение составляет множество точек, отвечающих резонансным кривым 3-го порядка.

Введение. При изучении динамики частиц газопылевых образований в космическом пространстве наряду с силами ньютоновского притяжения F_g учитывается и сила светового давления F_p, исходящее от излучающего тела (звезды) [1]. При этом в ряде случаев световой поток бывает такой интенсивности, что сила светового давления F_p может конкурировать с силой тяготения F_g, а иногда даже превосходит ее по величине.

В ряде случаев сила светового давления зависит не только от излучательной способности звезды, но и геометрических размеров, плотности и отражательной способности конкретной частицы. При этом связь между параметрами звезды и частицы дает коэффициент редукции частицы, определяемым выражением

$$Q = 1 - (1+\varepsilon)A\frac{E}{fM} \qquad (1)$$

где fM – гравитационный параметр звезды, *A*–парусность частицы, *E* - коэффициент, характеризующий мощность источника излучения, ε - коэффициент отражения света. Для каждой частицы коэффициент *Q* имеет постоянное значение и характеризует степень восприимчивости частицы к излучению. При этом на достаточно крупные и наиболее плотные частицы с малыми значениями параметров *A* и *ε* наибольшее действие оказывает сила тяготения звезды, следовательно, $Q > 0$. Для мельчайших частиц с высокими парусностью и коэффициентом отражения действие света на частицу преобладает над гравитационной силой, когда коэффициент редукции $Q < 0$.

Подобная задача трех тел, впервые введенная в рассмотрение В.В.Радзиевским [2] и позволяющая учесть фактор влияния на частицу световой репульсии стала адекватной динамической моделью для изучения движения микрочастиц в системе, подобной системе Солнце–планета–частица.

Для описания движения частицы в рамках задачи трех тел с одной излучающей массой удобно использовать, как и в классической задаче трех тел [3], уравнения во вращающейся системе координат при учете замены Нехвила. Тогда соответствующая функция

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

$$W=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{2}e\cos\upsilon z^2+Q\frac{1-\mu}{R_1}+\frac{\mu}{R_2} \qquad (2)$$

$$R_1=\sqrt{(x+\mu)^2+y^2+z^2},\ R_2=\sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2+z^2}$$

где 1–μ и μ – безразмерные массы основных тел, υ – истинная аномалия, *e* – эксцентриситет орбиты основных тел, R_1 и R_2 расстояния от частицы с координатами *x, y, z* до основных тел содержит коэффициент редукции Q [1]. По своему физическому смыслу числовые значения коэффициента Q не превосходят единицы, причем для классической задачи трех тел Q =1 (излучение тел отсутствует).

Простыми словами точки либрации - постоянные решения принятой системы динамических уравнений задачи и представляют собой положения относительного равновесия в круговой задаче и периодические движения в эллиптической задаче. Координаты этих точек находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial z}=0 \qquad (3)$$

Коллинеарные точки либрации расположены на прямой, соединяющей основные тела, для них *y* = 0, *z* = 0. Стоит заметить, чти их положения на оси абсцисс определяются из первого уравнения системы (3).

Коллинеарные точки либрации. Уравнение для вычисления координаты коллинеарных точек либрации (КТЛ) имеет вид

$$f(x)=x-Q\ \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3}-\frac{\mu(x+\mu-1)}{|x+\mu-1|^3}=0 \qquad (4)$$

Как видно, уравнение (4) содержит массовый параметр μ (0< μ <0.5), коэффициент редукции массы частицы Q, которые в математической постановке задачи взаимно независимы. Поэтому рассматриваемая задача допускает двухпараметрическое семейство коллинеарных точек либрации.

Следует заметить, что задача об устойчивости КТЛ рассматривается в двумерном параметрическом пространстве.

Как видно из выражения для коэффициента редукции (1) следует, что для компонента звезды выполняется соотношение [4]

$$K=\frac{1}{1-Q}=C\frac{1-\mu}{\mu}, \qquad (5)$$

в котором параметр ***C*** $=E_2/E_1$ характеризует отношение мощностей излучения компонентов, а коэффициент *K* принимает положительные значения. Выражение в правой части равенства (5) зависит только от параметров двойной звезды. Для конкретной двойной звездной системы коэффициент *K*

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

равен известному числу K^*, поэтому равенство (5) связывает линейной зависимостью коэффициент редукции Q.

Из изложенного получаем, что для данной двойной звездной системы уравнение (4), определяющее точки либрации, содержит только один параметр, в качестве которого можно выбрать коэффициентов Q.

Устойчивость КТЛ в линейном приближении. Из выражения (4) получаем

$$f'(x) = 1 + 2a(x), \quad a = Q\frac{1-\mu}{|x+\mu|^3} + \frac{\mu}{|x+\mu-1|^3}$$

Таким образом, возникает параметр *a* [5], который в единственном числе входит в характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + (2-a)\lambda^2 - (1-a)(1+2a) = 0 \qquad (6)$$

Его корни равны

$$\lambda_\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(a - 2 \pm \sqrt{(9a-8)a}\right), \qquad \alpha = 1{,}2$$

Элементарный анализ показывает, что в промежутках $\frac{8}{9} < a \le 1$ и $-\frac{1}{2} < a \le 0$ корни λ_α чисто мнимые (на границах - кратные), следовательно, данные значения параметра *a* принадлежат области необходимых условий устойчивости.

Об устойчивости КТЛ по Ляпунову. В данной задаче реализуются резонансы третьего и четвертого порядков. Для резонансов третьего порядка резонансные значения параметра ***a*** имеют вид $a_\pm^* = 41/108 \pm 5\sqrt{145}/108,$ для резонансов четвертого порядка $a_\pm = (68 \pm 60\sqrt{5})/209$. Как и ожидалось, резонанс третьего порядка приводит [6] к неустойчивости коллинеарных точек либрации.

В работе [7] показывается, что при резонансе четвертого порядка коллинеарные точки либрации устойчивы по Ляпунову. При этом используется инвариантная нормальная форма и теорема Маркеева [8].

Канонические уравнения задачи и разложение функции Гамильтона. Движение частицы запишем каноническими уравнениями

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \qquad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (7)$$

где $\bar{q}_i$ суть декартовые координаты частицы $P(x, y, z)$, $\bar{p}_i$ - соответствующие канонические импульсы, а $H(x, y, z, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ - аналитическая функция Гамильтона относительно координат и импульсов, которая в нашем случае имеет вид

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

$$H=\frac{1}{2}(\bar{p}_1^2+\bar{p}_2^2+\bar{p}_3^2)+(\bar{p}_1 y-\bar{p}_2 x)-Q(1-\mu)/R_1-\mu/R_2,$$
$$R_\alpha=\sqrt{(x-x_\alpha)^2+y^2+z^2}, \qquad (\alpha=1,2) \tag{8}$$

Исследуем устойчивость коллинеарных точек либрации в предположении, что орбита основных тел круговая, а тело *P* бесконечно малой массы в начальный момент времени испытывает только те возмущения, не выводящие его из плоскости вращения основных тел S_1 и S_2.

В уравнения (7) вводим возмущения по формулам

$$x=x^*+q_1, \quad y=y^*+q_2, \quad \bar{p}_1=\bar{p}_1^*+p_1, \ \bar{p}_2=\bar{p}_2^*+p_2,$$
$$q_3=p_3=z_0^*=\bar{p}_3^*=0, \tag{9}$$

где
$$x^*=0{,}5(Q_1^{2/3}-2)-\mu, \quad y^*=0,$$
$$\bar{p}_1^*=\mp 0{,}5\sqrt{2(Q^{2/3}+1)-Q},$$
$$\bar{p}_2^*=0, \tag{10}$$

и раскладывая гамильтониан в ряд по степеням возмущений q_i и p_i в окрестности рассматриваемой коллинеарной точки, принимаемой за начало координат, получим

$$H=H_2+H_3+H_4+\ldots \tag{11}$$

Здесь H_m - однородные полиномы степени m $(m=2,3,4,\ldots)$ относительно обобщенных координат q_i и импульсов p_i, так что

$$H_m=\sum_{\nu+l=m} h_{\nu_1\nu_2 l_1 l_2}\cdot q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ . \tag{12}$$

Тогда в выражении (11) формы H_2, H_3 и H_4 с учетом (9) и (10) примут следующий вид:

$$H_2=\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)+p_1q_2-p_2q_1+h_{200}q_1^2+h_{020}q_2^2+h_{110}q_1q_2, \tag{13}$$

$$H_3=h_{300}q_1^3+h_{030}q_2^3+h_{210}q_1^2q_2+h_{120}q_1q_2^2. \tag{14}$$

$$H_4=h_{400}q_1^4+h_{040}q_2^4+h_{310}q_1^3q_2+h_{130}q_1q_2^3+h_{220}q_1^2q_2^2. \tag{15}$$

где,

Impact Factor: 9.9
ISSN-L: 2544-980X

$$h_{20} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{11}^2}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{22}^2}{Q_2^{2/3}} - 1\right], \quad h_{11} = 0, \quad h_{02} = \frac{1}{2},$$

$$h_{30} = \frac{1}{16}\left[(1-\mu)(5Q_{11}^2 - 12Q_1^{2/3})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} + \mu(5Q_{22}^2 - 12Q_2^{2/3})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}\right]$$

$$h_{12} = -\frac{5}{8}\left[(1-\mu)0{,}8Q_1^{2/3}\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} - \mu 0{,}8Q_2^{2/3})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}\right], \; h_{21} = 0, \; h_{03} = 0, \qquad (16)$$

$$h_{31} = 0, \; h_{13} = 0, \; h_{13} = 0, \; h_{13} = 0,$$

$$h_{40} = -\frac{1}{8}\Big[(1-\mu)(3Q_1^{4/3} - 7{,}5Q_1^{4/3}Q_{11}^2 + 35Q_{11}^4/16)/Q_1^2 +$$
$$+ \mu(3Q_2^{4/3} - 7{,}5Q_2^{2/3}Q_{22}^2 + 35Q_{22}^4/16)/Q_2^2\Big],$$

$$h_{22} = -\frac{5}{16}\Big[(1-\mu)(0{,}8Q_1^{4/3} - Q_{11}^2(Q_1^{2/3})/Q_1^2 +$$
$$+ \mu(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_{22}^2(Q_2^{2/3})/Q_2^2\Big],$$

$$h_{04} = -\frac{5}{32}\Big[(1-\mu)(2{,}4Q_1^{4/3})/Q_1^2 + \qquad Q_{11} = Q_1^{2/3},$$
$$+ \mu(2{,}4Q_2^{4/3})/Q_2^2\Big], \qquad Q_{22} = -Q_1^{2/3}$$

Рассмотрим случай системы с одной излучающей массой. При этом в системе (16) положим, что $Q_1 = Q$ и $Q_2 = 1$.

Заметим, что в рассматриваемой ограниченной плоской задаче трех тел для коллинеарных точек коэффициенты нормальной формы

$$h_{0040}, \; h_{2020}, \; h_{0202}, \; h_{0022}, \; h_{0220}, \; h_{2002}, h_{0004}, \; h_{0013}, \; h_{1102},$$
$$h_{0211}, \; h_{0112}, h_{1003}, \; h_{1201}, \; h_{0310}, \; h_{0030}, \; h_{2010}, h_{1020}, \; h_{0021}, \qquad (17)$$
$$h_{1110}, \; h_{2001}, \; h_{0120}, h_{1011}, \; h_{0111}, \; h_{1002}, \; h_{0012}, h_{0210}, \; h_{1101},$$
$$h_{0102}, \; h_{0003}, \; h_{0201},$$

$$h_{1100}, \; h_{1010}, \; h_{0110}, \; h_{0300}, \; h_{2100}, \; h_{310}, h_{1300}, \; h_{1030}, \; h_{3010},$$
$$h_{0130}, \; h_{2110}, h_{1210}, \; h_{1120},$$

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

принимают значения, равные нулю. Приводим также те коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона, которые всюду принимают значения, не равные нулю:

$$h_{2000},\ h_{0200},\ h_{0020},\ h_{3000},\ h_{1200},\ h_{1020}, h_{4000},\ h_{0400},\ h_{0040},\ h_{2200},\ h_{2020}, h_{0220} \tag{18}$$

В дальнейшем всегда будем учитывать значения указанных в (17) и (18) коэффициентов нормальной формы гамильтониана (11).

Устойчивость КТЛ при резонансе третьего и четвертого порядков. Полагая, что в системе отсутствуют резонансы 3-го и 4-го порядков, после применения преобразования Биркгофа и ограничиваясь разложением до четвертого порядка включительно, функцию Гамильтона можно записать в виде

$$H^* = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2, \qquad 2r_i = q_i^2 + p_i^2 \quad (i = 1, 2) \tag{19}$$

Согласно теореме Арнольда - Мозера [8] при одновременном выполнении неравенств

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 \neq 0, \tag{20}$$

$$C(\omega_1, \omega_2) = c_{20} \omega_2^2 + c_{11} \omega_1 \omega_2 + c_{02} \omega_1^2 \neq 0, \tag{21}$$

где k_1, k_2 - целые числа, удовлетворяющие условию $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$ ($k = |k_1| + |k_2|$ - порядок резонанса), а c_{ij} - коэффициенты нормальной формы, определяемые системой формул через коэффициенты исходного гамильтониана (11), для всех значений массового параметра μ из области устойчивости линейной системы всюду сохраняется устойчивость по Ляпунову исходной системы (7). Исключение составляют множества точек, отвечающие резонансам 3-го ($\omega_1 = 2\omega_2$) и 4-го ($\omega_1 = 3\omega_2$) порядков, где частоты определяются чисто мнимыми корнями характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения.

Как показали вычисления, модуль числового значения $N_1 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$ всегда отличен от нуля, что всюду выполняется неравенство $|F_1| > F_2$=0, гарантирующее согласно теореме А.П. Маркеева существование устойчивости по Ляпунову при резонансе 4-го порядка. Следовательно, справедливо следующее утверждение: в ограниченной плоской задаче трех тел с одной излучающей массой коллинеарные точки всюду устойчивы по Ляпунову из области устойчивости в линейном приближении. Исключение составляет множество точек, отвечающих резонансным кривым 3-го порядка.

Область устойчивости коллинеарных точек с одной излучающей массой (Q_2=1) в плоскости параметров (Q ,x) определяется одновременным выполнением следующих неравенств:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{8}{9} + \frac{x^*}{9(1-\mu)}\right] \cdot |x^* + \mu|^3 \leq Q \leq |x^* + \mu|^3, \\ &\left(\frac{8}{9} + \frac{x^*}{9\mu}\right) \cdot |x^* - 1 + \mu|^3 \leq 1 \leq |x^* - 1 + \mu|^3 \end{aligned} \tag{22}$$

Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

При этом для фиксированного значения массового параметра μ получим некоторую кривую, удовлетворяющую обоим неравенствам (22). Устойчивыми могут быть только внутренние коллинеарные точки либрации. Численный анализ неравенств (22) позволяет строить область устойчивости для произвольного значения массы μ.

Предположим, что имеем двойную звезду (рис.1,2), оба компонента которой излучают световую энергию. Используя условия (20) и (21), получим условия (23), позволяющие

$$\begin{aligned} &\left[\frac{8}{9}+\frac{x^*}{9(1-\mu)}\right]\cdot\left|x^*+\mu\right|^3 \le Q_1 \le \left|x^*+\mu\right|^3, \\ &\left(\frac{8}{9}+\frac{x^*}{9\mu}\right)\cdot\left|x^*-1+\mu\right|^3 \le Q_2 \le \left|x^*-1+\mu\right|^3 \end{aligned} \qquad (23)$$

получить геометрически весьма простую и физически ясную интерпретацию существования области устойчивости КТЛ в плоскости параметров Q_1 и Q_2.

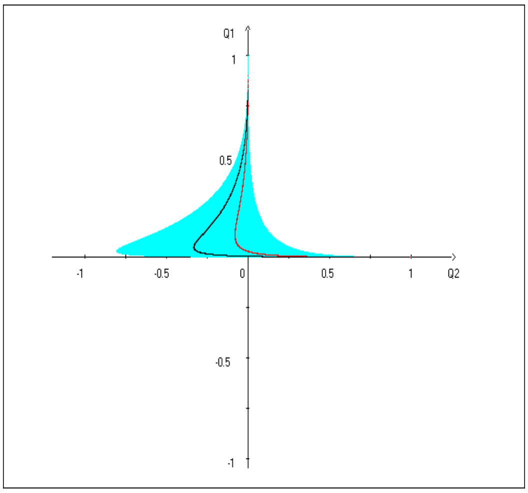

Рис.1. Область устойчивости коллинеарных точек при μ=0,01; кривые: слева - резонанс 4-го, правая - резонанс 3-го порядка.

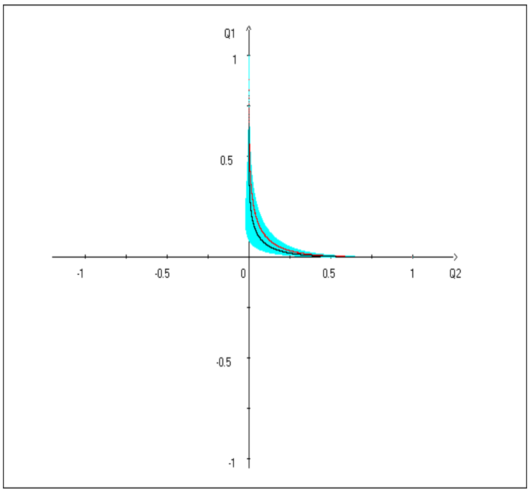

Рис.2. Область устойчивости коллинеарных точек при μ=0,05; кривые: слева - резонанс 4-го, правая - резонанс 3-го порядка.

Значительно заметное сужение области происходит при относительно большом значении массы μ=0,05 (рис.2). При относительном уменьшении μ=0,01 (рис.1) происходит заметное увеличение области устойчивости. Нетрудно заметить, что при μ=0,05 устойчивыми могут быть частицы, для которых преобладают действия гравитационных сил над силами светового давления от излучающих тел. Откуда следует, что при равных массах основных тел область устойчивости КТЛ состоит лишь из множества частиц при положительных значениях коэффициентов редукции Q_1 и Q_2

Литература:

1. Радзиевский В.В. Фотогравитационная небесная механика. Нижний Новгород: Изд. Ю.А.Николаев, 2003. 195 с.

2. Радзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // Астрон. ж. 1950. Т. 30. Вып. 4. С.249-256.

Impact Factor: 9.9
ISSN-L: 2544-980X
3. Szebehely V. Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies. N.Y.; L. Acad. Press, 1967. Себехей В. Теория орбит. М.:Наука, 1982. 656 с.

4. Куницын А.Л. Об устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // ПММ. 2000. Т.64. Вып.5. С.788-794.

5. Тхай В.Н. Параметрический резонанс в задаче об устойчивости коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2001. ч.2. С. 112-121.

6. Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации при внутреннем резонансе третьего порядка //АиТ. 2011. №9. 121126.

7. Тхай Н.В. Устойчивость коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел при внутреннем резонансе четвертого порядка //ПММ.2012. Т.76. Вып.4. С.610-615.

8. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.:Наука, 1978. 312 с.