Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

To‘G‘Ri To‘Rtburchak Sohada Telegraf Tenglamasi Uchun Dirixle-Neyman Masalasi

Karimov Kamoliddin To‘ychiboyevich [1]***, Sayyora Kamoliddinova*** [2]

Annotatsiya: Mazkur ishda to‘g‘ri to‘rtburchak sohada telegraf tenglamasi uchun Dirixle-Neyman masalasi o‘rganilgan. Masala yechimi yagonaligining mezoni ishlab chiqilgan. Masala yechimi qator ko‘rinishida topilgan bo‘lib, uning yaqinlashuvchi ekanligini asoslash jarayonida kichik maxrajlar muammosi yuzaga kelgan. Tegishli asimptotik formulalardan foydalanib, maxrajning noldan farqli ekanligini ko‘rsatuvchi baholar topilgan. Regulyar yechimlar sinfida yechimning mavjudligi ko‘rsatib o‘tilgan.

Kalit so‘zlar: telegraf tenglamasi, Dirixle-Neyman masalasi, spektral usul, masala yechimi yagonaligi, masala yechim mavjudligi, kichik maxrajlar muammosi.

I.Kirish.

Telegraf tenglamasi – bu to‘lqinlar harakati, ayniqsa elektr signallarining uzun simlarda (kabel, o‘tkazgichlar) tarqalishini modellashtiruvchi ikkinchi tartibli gipergiperbolik differensial tenglama hisoblanadi. Bu tenglama ilk bor XIX asrda telekommunikatsiya muhandislari tomonidan simli aloqa tizimlaridagi to‘lqinlar (elektr signal) tarqalishini tushunish uchun ishlab chiqilgan. Telegraf tenglamasi uchun chegaraviy masalalarni yechish elektr uzatish liniyalarida signalning qanday tarqalishini, uning zaiflashuvi yoki aks sado berishini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Bunday masalalar, odatda, fizik sharoitlar bilan asoslangan boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan to‘ldiriladi va klassik, hamda zamonaviy (raqamli yoki asimptotik) usullar yordamida tahlil qilinadi.

Hozirgi kunda zamonaviy aloqa vositalari va uzatish tizimlarining yuqori aniqlikda modellashtirilishi, signallarni aniq uzatish va tahlil qilishda matematik modellar, xususan, telegraf tenglamasiga asoslangan chegaraviy masalalarining roli beqiyosdir.

Dirixle-Neyman masalasining fizik mohiyati elektr signalining harakati haqida bo‘lib, chekka nuqtalardagi kuzatishlar asosida butun kabel bo‘ylab signalning qanday tarqalganini aniqlash masalasidir.

I. Masalaning qo‘yilishi

Aytaylik bizga $D=\left\{(x,y):0<x<l,\,0<y<T\right\}$ soha berilgan bo‘lsin, bu yerda l,T-musbat o‘zgarmaslar. Ushbu sohada quyidagi

$$Lu\equiv u_{xx}-u_{yy}-b^2u=0,\ \ b=const>0, \quad (1)$$

telegraf tenglamasini qaraylik.

(1) tenglama uchun D sohada Dirixle-Neyman masalasini qo‘yamiz va

tadqiq qilamiz.

[1] Farg’ona davlat universiteti matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasi dotsenti, Fizika-matematika fanlari doktori, karimovk80@mail.ru
[2] Farg‘ona Davlat Universiteti matematika yo‘nalishi 2-kurs magistranti, sayyorakamoliddinova3@gmail.com

Dirixle-Neyman masalasi. D sohada quidagi

$u(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D)$; (2)

$Lu=0,\quad (x,y)\in D$; (3)

$u_x(0,y)=u_x(l,y)=0,\quad 0<y<T$; (4)

$u(x,0)=\varphi(x),\ u(x,T)=\psi(x),\ 0<x<l,$ (5) shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\mathrm{x},\mathrm{y})$ funksiyani topilsin, bu yerda $\varphi(x)$ *va* $\psi(x)$-berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

II. Dirixle-Neyman masalasi yechimining yagonaligi

Dirixle-Neyman masalasida o‘zgaruvchilarni $u(x,y)=X(x)Y(y)$ formula bo‘yicha qidiramiz. Birinchi bo‘lib, bu formulani (1) tenglamaga qo‘yamiz:

$$X''(x)Y(y)-Y''(y)X(x)-b^2X(x)Y(y)=0.$$

Yuqoridagi tenglikning har ikki tomonini $X(x)Y(y)$ ga bo‘lib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)+b^2Y(y)}{Y(y)}=-\mu^2.$$

Natijada y o‘zgaruvchi bo‘yicha

$Y''(y)+\omega^2Y(y)=0$ (6)

tenglamani, x o‘zgaruvchi bo‘yicha esa quyidagi xos qiymat haqidagi masalani hosil qilamiz:

$X''(x)+\mu^2X(x)=0,\qquad 0<x<l,$ (7)

$X'(0)=X'(l)=0,$ (8)

bu yerda μ - ajratish o‘zgarmasi, $\omega^2=\mu^2+b^2$.

Qilingan hisob-kitoblar shuni ko‘rsatadiki, {(7), (8)} ko‘rinishdagi spektral masalaning xos qiymatlari

$$\mu_0=0,\ \mu_1=\frac{\pi}{l},\ \mu_2=\frac{2\pi}{l},\dots\mu_n=\frac{\pi n}{l}\dots$$

ko‘rinishda va ularga mos ortonormallangan xos funksiyalari esa quyidagi ko‘rinishda topiladi:

$$X_0=\frac{1}{\sqrt{l}},\ X_1=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right),\ X_2=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right),\dots,X_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\dots\quad n=1,2,\dots .$$

Qulaylik uchun bu spektral masalaning xos qiymatlari va ularga mos xos funksiyalarini

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{l}},\ agar\ \ \mu_0=0\ \ bo'lsa,\\ \sqrt{\dfrac{2}{l}}\cos(\mu_n x),\ agar\ \ \mu_n=\dfrac{\pi n}{l},\ n=1,2,\dots\ bo'lsa.\end{cases}\qquad (9)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bevosita hisoblasah orqali (9) funksiyalar sistemasini $L_2(a,b)$ fazoda to‘la ortonormal funksiyalar sistemasi ekanligini [1] adabiyotda berilgan to‘lalik haqidagi teoremadan foydalangan holda isbotlaymiz.

To‘lalik haqida teorema. Agar $\phi_n(x)$ ortonormallangan funksiyalar sistemasi $L_2(a,b)$ fazoda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b\left[\int_a^{\xi}\phi_n(x)dx\right]^2 d\xi=\frac{1}{2}(b-a)^2$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiyalar sistemasi $L_2(a,b)$ fazoda to‘la funksiyalar sistemasini tashkil qiladi.

(9) ortonormallangan funksiyalar sistemasini $L_2(0,l)$ funksiyalar fazosida to‘la ortogonal funksiyalar sistemasi tashkil qilishini yuqoridagi teoremaga asosan tekshiramiz:

$$\int_0^l\left[\int_0^t\sqrt{\frac{1}{l}}d\xi\right]^2 dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l\left[\int_0^t\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\left(\frac{\pi n\xi}{l}\right)d\xi\right]^2 dt=\int_0^l\frac{1}{l}t^2dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l\frac{2l}{\pi^2n^2}\sin^2\left(\frac{\pi nt}{l}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{l}\frac{\xi^3}{3}\bigg|_0^l+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2n^2}\int_0^l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)\right)dt=\frac{l^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2n^2}\left(\frac{t}{2}+\frac{l}{4\pi n}\sin\left(\frac{2\pi nt}{l}\right)\right)\bigg|_0^l=$$

$$=\frac{l^2}{3}+\frac{l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{l^2}{3}+\frac{l^2}{6}=\frac{l^2}{2}.$$

Demak (9) funksiyalar sistemasi $L_2(0,l)$ fazoda to‘la funksiyalar sistemasini tashkil qilar ekan.

Endi masala yechimi yagonaligini isbotlashda kerak bo‘ladigan quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$u_n(y)=\int_0^l u(x,y)X_n(x)dx,\quad 0\le y\le T,\quad n=0,1,2,\dots,\ (10)$$

bu yerda $u(x,y)$-qo‘yilgan Dirixle-Neyman masalaning yechimi, $X_n(x)$ funksiyalar esa (9) formula yordamida aniqlanadi.

(10) ga asosan, quyidagi ifodani kiritamiz:

$$u_{\varepsilon,n}(y)=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)X_n(x)dx,\qquad n=0,1,2\dots,\ (11)$$

bu yerda ε-yetarlicha kichik musbat son. (11) tenglikning ikkala tomonini ikki marta differensiallaymiz va (1) tenglamani hisobga olgan holda

$$u''_{\varepsilon,n}(y)=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{yy}(x,y)X_n(x)dx=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,y)X_n(x)dx-b^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)X_n(x)dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

Oxirgi ifodaning o‘ng tomonidagi birinchi integralda ikki marta bo‘laklab integrallash amalini bajaramiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{yy}(x,y)X_n(x)dx=\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,y)X_n(x)dx-b^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)X_n(x)dx=$$

$$=X_n(x)u_x(x,y)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u_x(x,y)X_n'(x)dx-b^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u(x,y)X_n(x)dx=$$

$$=X_n\left(l-\varepsilon\right)u_x(l-\varepsilon,y)-X_n\left(\varepsilon\right)u_x(\varepsilon,y)-u\left(x,y\right)X_n{}'\left(x\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u\left(x,y\right)X_n{}''\left(x\right)dx-$$

$$-b^2\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u\left(x,y\right)X_n\left(x\right)dx=X_n\left(l-\varepsilon\right)u_x(l-\varepsilon,y)-X_n\left(\varepsilon\right)u_x(\varepsilon,y)-u\left(l-\varepsilon,y\right)X_n{}'\left(l-\varepsilon\right)+$$

$$+u\left(\varepsilon,y\right)X_n{}'\left(\varepsilon\right)-(\mu^2+b^2)\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}u\left(x,y\right)X_n\left(x\right)dx.$$

So‘ngra $\varepsilon\to 0$ bo‘lganda limitga o‘tamiz va (4) hamda (8) shartlarni hisobga olgan holda quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$u_n''\left(y\right)+\omega_n^2u_n\left(y\right)=0,\qquad \omega_n^2=\mu_n^2+b^2. \quad (12)$$

(12) differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$u_n\left(y\right)=a_n\cos(\omega_n y)+b_n\sin(\omega_n y)\ , \quad (13)$$

bu yerda a_n va b_n-ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. Noma’lum a_n va b_n koeffitsientlarni topish uchun (5) chegaraviy shartlardan va (10) formuladan foydalanamiz:

$$u_n\left(0\right)=\int_0^l u\left(x,0\right)X_n\left(x\right)dx=\int_0^l \varphi\left(x\right)X_n\left(x\right)dx=\varphi_n, \quad (14)$$

$$u_n\left(T\right)=\int_0^l u\left(x,T\right)X_n\left(x\right)dx=\int_0^l \psi\left(x\right)X_n\left(x\right)dx=\psi_n. \quad (15)$$

(13) funksiyalar (12) tenglamani va (14) hamda (15) chegaraviy shartlarni qanoatlantirib, barcha $n\in N$ uchun quyidagi

$$\delta\left(n\right)=\sin\left(\omega_n T\right)\neq 0 \quad (16)$$

shart bajarilishini talab qilgan holda a_n va b_n koeffitsientlarni quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$a_n=\varphi_n,\ b_n=\frac{\psi_n-\varphi_n\cos\left(\omega_n T\right)}{\sin\left(\omega_n T\right)}. \quad (17)$$

(17) ni (13) formulaga qo‘yib, $u_n\left(y\right)$ funksiyalarning oxirgi ko‘rinishini quyidagi

$$u_n\left(y\right)=\varphi_n\cos\left(\omega_n y\right)+\frac{\psi_n-\varphi_n\cos\left(\omega_n T\right)}{\sin\left(\omega_n T\right)}\sin\left(\omega_n y\right) \quad (18)$$

formula yordamida aniqlaymiz.

1-teorema Agar (2)-(5) masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u holda bu yechimning yagona bo‘lishi uchun (16) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zaruriylik. Faraz qilaylik, (2)-(5) masalaning yagona yechimi mavjud bo‘lsin. Barcha $n\in N$ uchun (16) shartning bajarilishini ko‘rsatamiz. Aytaylik, ma’lum bir p son uchun $\delta\left(p\right)=\omega_p\sin\left(\omega_p T\right)=0$ bo‘lsin. U holda bir jinsli (2)-(5) masalaning noldan farqli yechimi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$u_p\left(x,y\right)=\cos(\mu_p x)\sin(\omega_n y). \quad (19)$$

Yetarlilik. Faraz qilaylik, $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0$ bo‘lsin va barcha $n\in N$ uchun (16) shart bajarilsin. Barcha $n\in N$ uchun $\varphi_n\equiv 0,\ \psi_n\equiv 0$ o‘rinli bo‘ladi. Demak, (18) formulani inobatga olsak, $u_n(y)=0$ bo‘ladi va (10) formula bo‘yicha quyidagicha yoziladi:

$$\int_0^l u(x,y)X_n(x)dx=0,\ \ n=0,1,2,\dots \quad (20)$$

Demak, $L_2(0,l)$ fazoda $X_n(x)$ funksiyalar sistemasining to‘laligiga asosan har qanday $y\in[0,T]$ uchun $[0,l]$ ning deyarli hamma joyida $u(x,y)=0$ bo‘ladi. Agar (2) shartni inobatga olsak, u holda $\overline{D}$ da $u(x,y)\equiv 0$ bo‘ladi. Demak, (2)-(5) masala yagona yechimga ega ekan.

Masala yechimi mavjudligiga o‘tishdan oldin n ning barcha qiymatlarida (18) formula bilan aniqlangan $u_n(y)$ funksiyalar mavjudmi yoki yo‘qmi degan savolga javob topish kerak.

Ma’lumki (16) ifoda cheksiz ko‘p nollarga ega. Qulaylik uchun (16) tenglikni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\delta(n)=\sin(\pi n\tilde{T}\tilde{\omega}_n) \quad (21)$$

bu yerda $\tilde{T}=\dfrac{T}{l}$, $\tilde{\omega}_n=\sqrt{1+\left(\dfrac{bl}{\pi n}\right)^2}$.

(21) ifodaga asosan, $\tilde{T}$ ga nisbatan $\delta(n)=0$ ifoda faqat va faqat quyidagi hollarda bajariladi:

$$\tilde{T}=k/n\tilde{\omega}_n,\ \ k,n\in \mathrm{N}. \quad (22)$$

$\delta(n)=0$ tenglamaning nollar to‘plamini $M=\{m_{kn}=k/n\tilde{\omega}_n\ \ k,n\in\mathrm{N}\}$ bilan belgilaymiz, ya’ni bazi k va n uchun $\tilde{T}=m_{kn}$ bo‘lsa, $\delta(n)=0$ bo‘ladi. Chunki $\tilde{T}$ ixtiyoriy musbat son, agar $\tilde{T}$ M to‘plamining elementi bo‘lmasa, u holda $\delta(n)$ ildizlariga qanchalik yaqin bo‘lsa ham, nol qiymat qabul qila olmaydi. Shuning uchun yetarlicha katta n larda, $\tilde{T}$ uchun $\delta(n)$ juda kichik bo‘lishi mumkin, ya’ni “kichik maxrajlar” muammosi yuzaga keladi. Shunday qilib, bunday holatni oldini olish uchun, $\tilde{T}>0$ va musbat C_0 doimiy mavjudligini isbotlaymiz, shunda $\delta(n)$ ifoda nolga yaqinlashmaydi va uning tegishli asimptotikasi bilan ajratilgan bo‘ladi.

1-lemma. Agar quyidagi shartlardan biri bajarilsa:

1. $\tilde{T}$ istalgan natural son bo‘lsa;
2. $\tilde{T}=p/q$ istalgan ratsional son bo‘lsa, bunda $p,q\in N,\ (p,q)=1,\ p/q\notin N$;

u holda C_0 musbat doimiy son uchun quyidagi

$$|\delta(n)|\geq C_0>0 \quad (23)$$

baholash o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $\tilde{\omega}_n$ ifodasi bl ga bog‘liq bo‘lib, agar quyidagi

$$\frac{bl}{\pi}<1 \;\; yoki \;\; n>\frac{bl}{\pi} \; (24)$$

shartlar bajarilsa, $\tilde{\omega}_n$ ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\tilde{\omega}_n=\left(1+\left(\frac{bl}{\pi n}\right)^2\right)^{1/2}=1+\theta_n. \; (25)$$

(25) ifodadan $\theta_n>0$ va $\left(1+\left(\frac{bl}{\pi n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}>\theta$. U holda, θ_n quyidagicha baholanadi:

$$0<\theta_n<\left(1+\left(\frac{bl}{\pi n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \; (26)$$

Shunday qilib, (25) ifodani hisobga olgan holda, (21) munosabatni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\delta(n)=\sin(\pi n\tilde{T}+\pi n\tilde{T}\theta_n). \; (27)$$

1) Agar, $\tilde{T}=p$ bo‘lsa, bu yerda $p\in N$, u holda, (27) ifoda quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$|\delta(n)|=|\sin(\pi np+\pi np\theta_n)|=|\sin(\pi np\theta_n)|. \; (28)$$

θ_n ketma-ketlik (26) baholashga ko‘ra $n\to\infty$ da quyidagicha baholanadi:

$$0<\theta_n<1.$$

(25) tenglikdan θ_n ning qiymati $n\to\infty$ bo‘lganda juda kichik son bo‘lishi kelib chiqadi. Shunda, ma’lum tengsizlikka asosan, quyidagilarni qo‘llashimiz mumkin:

$$|\sin x|\ge\frac{2}{\pi}|x|, \quad 0\le|x|\le\frac{\pi}{2}. \; (29)$$

(26), (28) va $\theta_n$ning $n\to\infty$ bo‘lganda yetarlicha kichik son bo‘lishini hisobga olgan holda quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|\delta(n)|>\frac{2}{\pi}\pi np\theta_n\ge\tilde{C}_1>0. \; (30)$$

2) Agar $\tilde{T}=p/q$ $(p,q)=1$ bo‘lsa, pn ni q ga qoldiqli bo‘linishini ko‘rib chiqamiz: $np=sq+r,\;\; s,r\in N_0=N\cup\{0\},\;\; 0\le r<q.$ U holda (27) ifodasini quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$\delta(n)=(-1)^s\sin(\frac{\pi r}{q}+\pi n\tilde{T}\theta_n)$. (31) $r=0$ bo‘lgan holat yuqorida ko‘rib chiqilgan. Faraz qilaylik, $r>0$ bo‘lsin. Bu holda, $1\le r\le q-1,\;\; q\ge 2$ tengsizlik hosil bo‘ladi. Chunki $\delta(n)=\sin(\frac{\pi r}{q}+\pi n\tilde{T}\theta_n)$ ifoda $n\to\infty$da cheklangan, shuning uchun (31) ifodadan quyidagini tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\left|\delta(n)\right| \geq \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{q}\right| \geq \tilde{C}_2 > 0. \quad (32)$$

Shunday qilib, (30) va (32) tengsizliklardan (23) baholashning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

III. Dirixle-Neyman masalasi yechimining mavjudligi

Agar (23) baholash bajarilsa, (6) va (7) tenglamalarning yechimlari asosida (1) tenglama uchun Neyman masalasining yechimini

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) X_n(x) \quad (33)$$

Furye qatori ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Quyida biz $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalari uchun ma’lum shartlar bajarilganda, (33) qatorining yig‘indisi bo‘lgan $u(x,y)$ funksiyani (2) va (3) shartlarni qanoatlantirishini ko‘rsatamiz.

2-lemma. Agar 1-lemma shartlari bajarilsa, $n > n_0$ va $y \in [0,T]$ uchun quyidagi baholashlar o‘rinli bo‘ladi:

$$\left|u_n(y)\right| \leq C_1\left(\left|\varphi_n\right| + \left|\psi_n\right|\right), \quad (34)$$

$$\left|u_n''(y)\right| \leq C_2 n^2\left(\left|\varphi_n\right| + \left|\psi_n\right|\right), \quad (35)$$

bu yerda C_i - musbat o‘zgarmas son.

(34) va (35) baholashlarning to‘g‘riligini bevosita (18) formula va (23) baholash asosida isbotlash mumkin.

Aytaylik, 1-lemma shartlari bajarilsin. U holda (33) qator va ikkinchi tartibli hosilalardan tashkil topgan qatorlar (34) va (35) baholashlar asosida $\overline{D}$ sohada

$$C_3 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^3\left(\left|\varphi_n\right| + \left|\psi_n\right|\right) \quad (36)$$

sonli qator bilan chegaralangan bo‘ladi.

3-lemma. Aytaylik, $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0,l]$ va quyidagi

$$\varphi^i(0) = \varphi^i(l) = 0, \; \psi^i(0) = \psi^i(l) = 0, \; i = 0,2,$$

shartlar bajarilgan bo‘lsin. Shunda quyidagi ifodalar o‘rinli bo‘ladi:

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(4)}}{\mu_n^4}, \; \psi_n = \frac{\psi_n^{(4)}}{\mu_n^4}, \quad (37)$$

bu yerda

$$\varphi_n^{(4)} = \tfrac{2}{l}\int_0^l \varphi^{(4)}(x)\cos(\mu_n x)dx, \; \psi_n^{(4)} = \tfrac{2}{l}\int_0^l \psi^{(4)}(x)\cos(\mu_n x)dx,$$

va

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(4)}\right| \leq \left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L^2[0.l]}^2, \; \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(4)}\right| \leq \left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L^2[0.l]}^2. \quad (38)$$

Isbot. (14) va (15) formulalardagi integrallarni to‘rt marta bo‘laklab integrallaymiz. Keyin, 3-lemma shartlarini hisobga olgan holda, (37) tengliklarini hosil qilamiz. Lemma shartlariga ko‘ra, $\varphi^{(4)}(x)\ va\ \psi^{(4)}(x)$ funksiyalar $[0,l]$ oraliqda uzluksizdir, shuning uchun Furye qatorlari nazariyasidan ma’lumki, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(4)}\right|^2$ va $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(4)}\right|^2$ qatorlar yaqinlashadi va ular uchun (38) Bessel tengsizliklari bajariladi.

Agar 3-lemma shartlari bajarilsa, (36) qator

$$C_4\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\left|\varphi_n^{(4)}\right|+\left|\psi_n^{(4)}\right|\right),\ (39)$$

sonli qator yordamida baholanadi. (39) qatorining yaqinlashuvchiligiga asoslanib, Veyershtras teoremasiga ko‘ra (39) qator hamda D sohadagi ikkinchi tartibli hosila olingan qatorlar absolyut va tekis yaqinlashadi.

Aytaylik, 1-lemmadagi $\tilde{T}$ oldindan berilgan son bo‘lib, ba’zi $n=p=n_1,n_2,...n_m$, $1\le n_1<n_2<...n_i<...<n_m\le n_0$, $i=\overline{1,m}$ berilgan natural qiymatlarda $\delta(p)=0$ qiymat qabul qilsin, u holda (1) tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasining yechimi mavjud bo‘lishi uchun quyidagi shart bajarilishi zarur va yetarli:

$$\varphi_p\cos\omega_p T=\psi_p,\ \ p=n_1,n_2,...n_m.\ (40)$$

Bu holda (1) tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasining yechimi

$$u(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{n_1-1}+...+\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m-1}+\sum_{n=n_m+1}^{\infty}\right)u_n(y)X_n(x)+\sum_p A_p u_p(x,y),\ (41)$$

qator yig‘indisi ko‘rinishida aniqlanadi. Bu yerda oxirgi yig‘indida p ning qiymatlari $n_1,n_2,...n_m$ ko‘rinishda bo‘ladi, A_p esa ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lib, $u_p(x,y)$ funksiyalar quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$u_p(x,y)=\left(\varphi_p\cos\omega_p y+b_p\sin\omega_p y\right)\cos\mu_p x,$$

bu yerda b_p ixtiyoriy o‘zgarmas son. Agar (41) formulaning o‘ng qismidagi cheklangan yig‘indilarning yuqori chegara pastki chegaradan kichik bo‘lsa, u holda ushbu yig‘indilar nolga teng deb qabul qilinadi. Shu tariqa, quyidagi teorema isbotlandi:

2-teorema. Faraz qilaylik, $\tilde{T}$ 1-lemma shartlarini qanoatlantirsin va $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funksiyar esa 3-lemma shartlarini qanoatlantirsin. Agar $\delta(n)\ne 0,\ n=\overline{1,n_0}$ bo‘lsa, u holda (1) tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasining yagona yechimi mavjud va bu yechim (33) qator orqali aniqlanadi.

Agar $\delta(n)=0,\ n=n_1,n_2,...n_m\le n_0$ bo‘lsa, u holda (1) tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi faqat (40) ortogonal shart bajarilganda yechimga ega bo‘ladi va bu yechim (41) qator yig‘indisi ko‘rinishida aniqlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Трикоми Ф., Интегральные уравнения. Из. Иностранной литературы. Москва 1960. 301 с. Ст.125
2. A.Q.O‘rinov, telegraf tenglamasi uchun chegaraviy masalalar. Toshkent “Universitet”. (1996)

3. Jonh F. *Diriclet problem for a hyperbolic equation*, Amer. J. Math. **63** (1), 141–154 (1941).
4. АрнольдВ.И. *Малые знаменатели*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **25**, 21–86 (1961).
5. Капитонов Б.В. *О разрешимости задачи Дирихле для телеграфного уравнения*, Сиб. матем. журн. **17** (2), 273–281 (1976).
6. Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков*, Матем. заметки **97** (2), 262–276 (2015).
7. АрнольдВ.И. *Математическое понимание природы*. 2 изд. (МЦНМО, М., 2010).
8. Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Докл. РАН **413** (1), 23–26 (2007).