Impact Factor: 9.9 ISSN-L: 2544-980X

Свободные Волы В Вязкоупругом Полом Цилиндре

Хамидов Шерали Ширинович [1]***, Туева Ситора Савриддин кызы*** [2]

Аннотация: Целью работы является разработка методики и алгоритма, анализ характеристик нормальных затухающих волн в области низких и высоких частот, изучение особенностей формирования поверхностных волн, анализ кинематических характеристик этих волн в широком диапазоне частот (волновых чисел). Динамическое поведение цилиндра описывается интегро-дифференциальными уравнениями механики деформируемых тел. После применения метода замораживания Филатова, получаются дифференциальные уравнения с комплексными коэффициентами. Спектральная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений выражаются цилиндрическими функциями Бесселя и Ханкеля. Частотные уравнения решаются численно методами Мюллера и Гаусса. Исследовано изменение собственной частоты и фазовой скорости в зависимости от волнового числа. Найдено, что объемных сейсмических волн претерпевают малую дисперсию. Однако дисперсия значительна для поверхностных волн и некоторых других явлений. Учет реологических свойств материала сопровождается дисперсиями волн. Механизмы, посредством которых энергия упругих волн преобразуется в тепло, не совсем ясны. Предложены различные механизмы потерь, но не один из них не отвечает полностью всем требованиям. Этот процесс исследуется в настоящей работе. Обнаружена, что для пологого цилиндра существуют два вида низких фазовых скоростей, которыее соответствуют поверхностным волнам.

Ключевые слова: собственные волны, полое цилиндрическое тело, напряжение, спектральная задача, собственная частота, фазовая скорость.

1. Введение

Распространение деформируемых волн в длинных телах различной конфигурации исследовано в работах [1,2,3]. В этих работах в основном рассматривается распространение упругих волн в волноводах плоского (или цилиндрического) поперечного сечения. В этих работах приведены результаты, полученные Похгаммером. В 1876 г. были получены трансцендентные уравнения, описывающие фазовые скорости от волнового числа (или дисперсионное уравнение). Распространение упругих волн в стержне кругового сечения рассмотрена в работах Кри. В работах Дж.В.Стретта (в 1885 г.) рассмотрено распространение волн в упругом полупространстве, названная впоследствии его именем.

Дисперсионные характеристики характеризуют волновое движение в протяженных телах, которые описывают распространение свободных волн при любом значении частоты (имеющих нулевые частоты запирания) [4,5].

Поскольку фазовые скорости распространения волн в слое близки к скорости волны Рэлея, но всегда различны, то в общем случае напряженно-деформированное состояния в слое формируются от поверхностной волна. [6,7]. Максимальные амплитуды напряжений и перемещений возникают на поверхности слоя или полупространстве [8,9] и в процесс деформации происходит обмен энергией между поверхностями. Дисперсионное уравнение сплошного упругого цилиндра имеет (существует) только один корень и то с нулевой частотой

[1] Преподаватель Бухарского государственного педагогического института
[2] Студентка Бухарского государственного педагогического института

запирания [10,11]. Рэлеевские волны не затухают, т.е., не происходит потеря энергии. Поэтому рэлеевские волны являются бездисперсионными (их фазовая скорость вдоль поверхности не зависит от частоты) и в котором упругая среда однородная и изотропная. Рэлеевские волны являются незатухающими, бездисперсионными (их фазовая скорость вдоль поверхности не зависит от частоты) и существуют во всем диапазоне частот, в котором упругую среду, заполняющую полупространство, можно считать однородной и изотропной [12]. Дисперсионное уравнение и свойства их корней, описывающие нормальных волн в сплошном цилиндре и полом цилиндре существенно отличаются. В работах [13,14] приведен качественный анализ дисперсионных соотношений.

Дисперсионные характеристики упругих волн в полом цилиндре со свободными поверхностями зависят от физико-механических свойств материала, радиуса кривизны и толщины стенки цилиндра. Влияние этих параметров на поведение собственных волн в полом цилиндре рассмотрено в работах [15 – 17]. Исследование дисперсионных соотношений для цилиндрических волноводов основано на специальных функциях.

2. Методы

Рассматривается распространение свободных (или собственных) волн в вязкоупругом однородном и изотропном полом цилиндре, внутренним и внешним радиусом соответственно *a* и *R*.

Линейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие распространение волн в полом цилиндре, в векторной форме, принимают вид

$$\tilde{\mu}\nabla^2\vec{u}+(\tilde{\lambda}+\tilde{\mu})grad\,di\vartheta\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где

$$\tilde{\lambda}\,f(t)=\lambda_0\left[f(t)-\int_0^t R_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau\right],\ \tilde{\mu}\,f(t)=\mu_0\left[f(t)-\int_0^t R_\mu(t-\tau)f(\tau)d\tau\right], \quad (2)$$

$f(t)$ – произвольная функция времени; R_λ $(t-\tau)$ и R_μ $(t-\tau)$ – ядра релаксации; λ_0,μ_0 – мгновенные модули упругости; u – вектор перемещений; ρ – плотность среды; κ– порядковой номер слоев; ν_κ – коэффициент Пуассона, который считаем не релаксирующей величиной [6].

Принимаем интегральные члены в (2) малыми. Тогда функцию $f(t)$ можно представить в виде $f(t)=\psi(t)e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$ – медленно меняющаяся функция времени; ω_R – действительная константа. На свободной поверхности полого цилиндра ставится следующие условия:

$$r=a,R:\sigma_{rr}=\sigma_{r\theta}=\sigma_{rz}=0. \quad (3)$$

Для аналитического решения поставленной задачи применяется процедура замораживания [7], тогда соотношения (2) заменяется приближенными выражениями

$$\bar{\lambda}\,f(t)=\lambda_0\left[1-\Gamma_\lambda^C(\omega_R)-i\Gamma_\lambda^S(\omega_R)\right]f(t),$$

$$\bar{\mu}\,f(t)=\mu_0\left[1-\Gamma_\mu^C(\omega_R)-i\Gamma_\mu^S(\omega_R)\right]f(t),$$

$$\Gamma_\lambda^c(\omega_R)=\int_0^\infty R_\lambda(\tau)\cos\omega_R\tau\,d\tau,\Gamma_\mu^c(\omega_R)=\int_0^\infty R_\mu(\tau)\cos\omega_R\tau\,d\tau,$$

$$\Gamma_\lambda^s(\omega_R)=\int_0^\infty R_\lambda(\tau)\sin\omega_R\tau\,d\tau,\quad \Gamma_\mu^s(\omega_R)=\int_0^\infty R_\mu(\tau)\sin\omega_R\tau\,d\tau\text{ -}$$

соответственно, косинус- и синус образы Фурье ядра релаксации материала. Для получения численных результатов в качестве ядра вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро релаксации $R_k\left(t\right)=A_k e^{-\beta_k t}/t^{1-\alpha_k}$.

В осесимметричной деформации полого вязкоупругого цилиндра вектор смещений $\vec{u}\left\{u_r,u_z\right\}$ представится в виде [15]:

$\vec{u}=\vec{U}(r)\exp\left[i\alpha(z-ct)\right]$, (4)

где

$$\vec{U}(r)=U_r(r)\vec{i}+U_z(r)\vec{j}\ ,$$

$$U_r(r)=(1/\alpha)Q_1(p_1r)+(\alpha/p_2^2)Q_2(p_2r),$$
$$U_z(r)=i(Q_0(p_1r)+Q_0(p_2r)),$$

$$p_1^2=\alpha^2-\gamma_{RI1}^2;\gamma_{RI1}=\frac{\omega_R R}{V_{0D}}+i\frac{\omega_I R}{V_{0D}},$$
$$p_2^2=\alpha^2-\gamma_{RI2}^2;\gamma_{RI2}=\frac{\omega_R R}{V_{0s}}+i\frac{\omega_I R}{V_{0s}},k=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Здесь α – волновое число; ω – круговая частота; V_{0D},V_{0s} – скорости волн продольных и поперечных волн соответственно, ν – коэффициент Пуассона материала полого вязкоупругого цилиндра; R – внешний радиус пологого цилиндра. Распространение возмущений в полом цилиндре удовлетворяют уравнениям движения Ламе. Решение дифференциальных уравнений удовлетворяет специальным функциям Бесселя и Ханкеля. В этом случае радиальные функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$\frac{dQ_0(p_kr)}{dr}=Q_1(p_kr),Q_0(p_kr)=A_kL_0(p_kr)+M_kL_0(p_kr),(k=1,2)$, (5)

где A_i, B_i – произвольные интегральные постоянные, а функции $L_0(p_\kappa r)$, $M_0(p_\kappa r)$ принимают следующий вид

$$L_0(pr)=\{I_0(pr),pr>0;I_0(pr),pr>0,$$
$$M_0(pr)=\{K_0(pr),pr>0;Y_0(pr),pr>0. \quad (6)$$

Задача решается в безразмерных переменных.

При исследовании процессов распространения затухающих волн в упругих слоисто-однородных средах с плоскопараллельными границами раздела в первую очередь необходимо определить дисперсионные характеристики этих волн. Условия существования нетривиального решения приводит к дисперсионному уравнению, которое определяет фазовую скорость нормальных волн как трансцендентную функцию комплексной частоты и параметров модели цилиндра. Под дисперсионными характеристиками понимаются фазовые и групповые скорости $C_ф$ и $V_{гр}$, коэффициенты затухания со временем Ω_I . Известно, что величины $V_ф$ и Ω_I связаны со значением корня дисперсионного уравнения

$\Delta(\omega,\ \xi)=0$, (7)

формулами C_ϕ =Imω(ξ) , Ω_I=-Reω(ξ), где ω-комплексная частота ; ξ-волновое число. Фазовая и групповая скорость связаны со значением корня дисперсионного уравнения некоторыми сложными зависимостями. Таким образом, чтобы иметь возможность вычислять дисперсионные характеристики, необходимо произвести качественное исследование корней уравнения (6) в точках комплексной плоскости, а также разработать метод их численного определения. Более целесообразным является прямое определение комплексных корней методам Мюллера. Рассмотрим сначала низкочастотные колебания, для этого перейдем в уравнении (7) к пределам при $\bar{k}r_1 \to 0, \bar{m}r_1 \to 0$ и при $R_{\lambda k} = 0, R_{\mu k} = 0$. Получается биквадратное уравнение [2]. В результате получится спектр волны L, который начинается с нулевой частоты. Фазовая скорость c_L волны L не зависит от скорости продольных волн c_{p1} в среде. Но фазовая скорость c_L волны L зависит от плотности ρ_1, скорости c_{s1} и реологических свойств материалов деформируемых сред

$$c_L = \frac{c_{s1}\Gamma_s^{\cdot}}{\sqrt{\left[\rho_{01} + c_{s0}^2\Gamma_s^{\cdot}\right]}}, \quad (8)$$

где $\rho_{01} = \rho_0 / \rho_1, c_{s0} = c_s / c_0$, ρ_0 - плотность жидкости, c_0-скорость звука в жидкости. Волна L испытывает экспоненциальное затухание, если скорость ее c_L оказывается выше скорости c_{s1}. При $\omega = \omega_R + i\omega_I$ =0 волна L становится затухающей, и выполняется условия $c_{s1} < c_0\sqrt{1-\rho_{01}}$. Если учитываются реологические свойства материалов, тогда $c_{s1} < c_0\sqrt{1-\rho_{01}} / \Gamma_s^{\cdot}$. Самой простой моделью, в которой существуют волна T, является труба, находящаяся в пустоте. Спектр этой волны начинается с нулевой частоты, при которой фазовая скорость c_T не зависит от толщины стенок, и равна скорости стержневой волны

$$c_T^2 = \left[\frac{3-4\gamma_1^2}{1-\gamma_1^2}\right] c_{s1}^2\Gamma_s^{\cdot}, \quad \gamma_1 = c_{s1} / c_{p1} < 1. \quad (9)$$

Для существования T волны параметр γ_1 должен принадлежать в интервале $\gamma_1 \in (3/4; 1)$. В общем случае дисперсия гидроволн (для упругих или вязкоупругих механических систем) может быть нормальной или аномальной [1]. Соответствующая групповая скорость определяется по формуле [1]

$$C_T = \frac{c_T^2}{c_T - \omega\frac{\partial c_T}{\partial\omega}} \quad (10)$$

Дисперсионные зависимости в поставленной задаче получаются в аналитическом виде, как дисперсионное уравнение, приведённое в работе [16]. Решение дисперсионного уравнения получается только численным методом или применяются методы качественного анализа. Для полого цилиндра у дисперсионного уравнения упругого цилиндра существуют две действительные корни, которые обладают дисперсией в общем случае. При некоторых соотношениях параметров могут существовать скорости волн Рэлея, которые не обладают дисперсией. Учет вязкоупругих свойств материалов усложняет поставленной задачи. Корни дисперсионного уравнения станут комплексными. Свободные волны, в этом случае, задыхаются по времени. Точное решение поставленной задачи, сформулированной на основе дифференциальных уравнений динамической теории вязко - упругости, позволяет исследовать дисперсионные зависимости нормальных затухающих волн численно или методом качественного анализа. Параметры ядра релаксации принято в виде $A = 0{,}048; \quad \beta = 0{,}05; \quad \alpha = 0{,}1.$

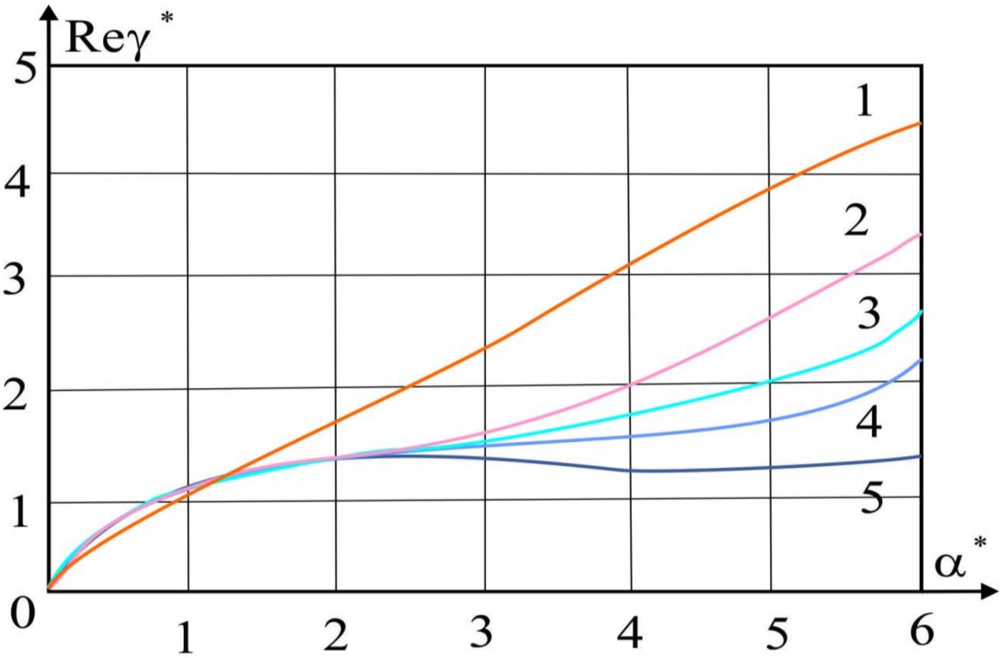

Рис. 1. Влияние толщинного параметра на дисперсионные свойства первых нормальных осесимметричных волн в полом цилиндре:
сплошные – первая волна

1 – r_1 = 0.3, 2 – r_1 = 0.8, 3 – r_1 = 0.9, 4 – r_1 = 0.95, 5 – r_1 = 0.99

На рис. 1 изображены реальные части дисперсионных кривых осесимметричных волн для полого вязкоупругого цилиндра при различных значениях внутреннего радиуса цилиндра. Влияние толщинного параметра на дисперсионные свойства первых нормальных осесимметричных волн в полом цилиндре: сплошные – первая волна1 – r_1 = 0.3, 2 – r_1 = 0.8, 3 – r_1 = 0.9, 4 – r_1 = 0.95, 5 – r_1 = 0.99.

При вычислении принята ν =0.25, и внутренний радиус $a \in (0.39 \div 0.9)$. На рис.2 сплошными линиями отмечены реальные части первой дисперсионной кривой. Видно, что с увеличением волнового числа соответствующие дисперсионные кривые увеличиваются с ускоренным темпом.

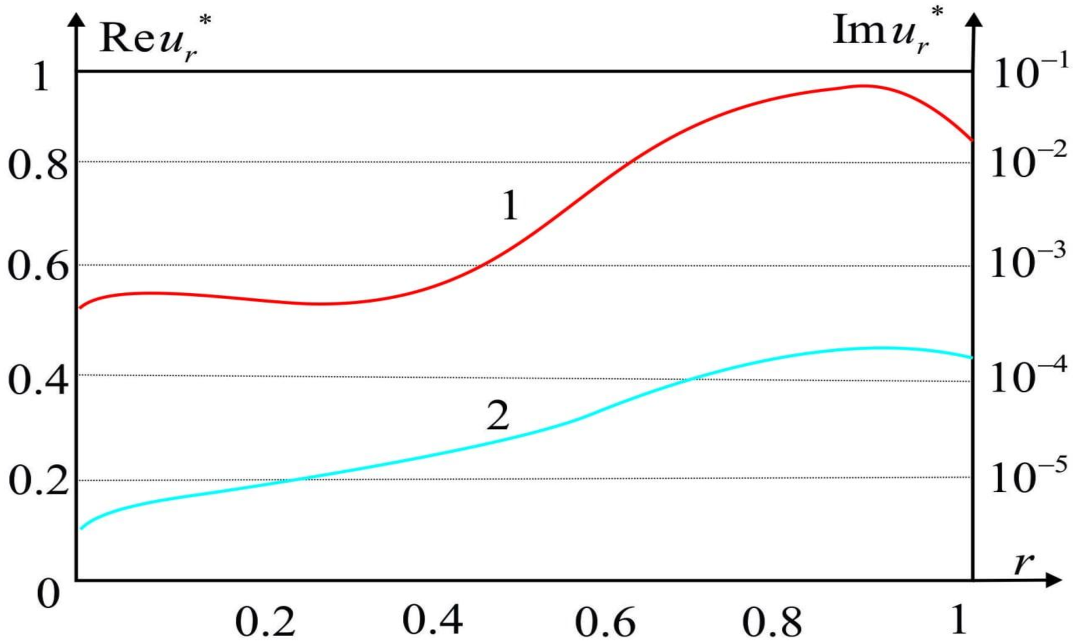

Рис. 2. Распределение по радиусу нормированных комплексных амплитуд смещений в первой нормальной волне (α = 10):1. $\mathrm{Re}\,u_r^*$; 2. $\mathrm{Im}\,u_r^*$.

Для $0<\alpha<1$ величинах волнового числа первые дисперсионные кривые при различных r_1 практически одинаковы. Соответствующая фазовая скорость удовлетворяет следующие выражения

$$\operatorname{Re}\frac{c_R}{c_s}=\Psi\sqrt{2(1+\nu)}\approx 1.5731,$$

где Ψ - параметр, который характеризует вязкие свойства материалов цилиндра. Если $\alpha>1$, тогда с увеличением волнового числа реальная и мнимая части низшей моды фазовой скорости существенно уменьшаются с увеличением r_1. С уменьшением толщины полого цилиндра реальные и мнимые части первой и второй мод отклоняются друг от друга и плавно уменьшается первая мода фазовой скорости, а вторая мода - умеренно снижается. Когда a=0.97, полый цилиндр рассматривается как цилиндрическая оболочка. Дисперсионные кривые при $1.8<\alpha<3.0$ практически не изменяются, т.е. становятся горизонтальными по оси абсцисс. При дальнейшем увеличении волнового числа $\alpha>3.0$ реальные и мнимые части фазовой скорости первой и второй мод, сначала возрастут и приближаются к скорости волны Рэлея [16,17] .

Заключения

Исследованы свойства поверхностных волн в вязко-упругом полом цилиндре. Найдено, что в полом вязко-упругом цилиндре существуют две комплексные нормальные волны, реальные части которых в предельном случае приближаются к скорости волн Рэлея.

Установлено, что поверхностные волны в полом вязко-упругом цилиндре локализуются на внешней и внутренней свободной поверхностях цилиндра.

Литература

1. Rayleigh J. W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc.– 1885/1886.– **17**, N 253.– P. 4–11.

2. Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн // Физ. акустика: Принципы и методы (пер. с англ.).– 1973.– **6**.– С. 137–202.

3. Викторов И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах // Акуст. ж.– 1979.– **25**, N 1.– С. 1–17.

4. Oliver J. A summary of observed seismic surface wave dispersion // Bull. Seism. Soc. Amer.– 1959.– **52**, N 1.– P. 81–90.

5. Owen T. E. Surface wave phenomena in ultrasonics // Progr. Appl. Matter. Resch.– 1964.– **6**.– P. 69–87.

6. Uberal H. Surface waves in acoustics // Phys. acoustics: Principles and metods.– **10**.– 1973.– P. 1–60.

7. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.

8. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. мех.– 1984.– **20**, N 8.– С. 25–29.

9. Комиссарова Г. Л. К решению задачи о распространении волн в цилиндре с жидкостью //Прикл. мех.– 1990.– **26**, N 8.– С. 25–29.

10. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, N 3.– С. 44–55.

11. Комиссарова Г. Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью

тонкостенных цилиндрах // Прикл. мех.– 2002.– **38**, N 1.– С. 124–134.

12. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. Особенности динамического деформирования полого цилиндра // Прикл. мех.– 1986.– **22**, N 5.– С. 3–8.
13. Rosenberg R. L., Thurston R. N. Relationship between plate and surface modes of a tube //J. Acoust. Soc. Amer.– 1977.– **61**, N 6.– P. 1499–1502
14. Thurston R. N. Elastic waves in rod and clad rods // J. Acoust. Soc. Amer.– 1978.– **64**, N 1.– P. 1–37.
15. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.– К.: Наук. думка, 1978.– 264 с.
16. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновое процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Германия, LAP, Lambert Academic Publishing . 2012-220 p.